Propuesta de entorno computacional como apoyo a la enseñanza de las matemáticas

Planteamiento

Carlos Armando Cuevas Vallejo
Santiago Marcos Zepeda Martínez
Institución: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav)

El cálculo diferencial e integral es una de las piedras angulares de la matemática cuya aportación a los fundamentos teóricos y a las aplicaciones de la matemática son de vital importancia para nuestro entorno. Los orígenes del cálculo se encuentran desde los primeros vestigios de nuestra sociedad. Así por ejemplo se puede constatar, el uso intuitivo de la integral en los papiros de Rhind y Golenischev para el cálculo de áreas.

En consecuencia el cálculo diferencial e integral es materia obligada e interviene de manera trascendente en el plan de estudios de muchas escuelas tanto a nivel medio como superior.

Sin embargo, los reportes de problemas en su enseñanza aprendizaje son frecuentes. Por ejemplo, se informa de un alto índice de reprobación, en esta materia, inclusive con alumnos que cursan ésta asignatura en más de una ocasión, este problema no sólo es a nivel nacional sino también internacional. Para muestra basta ver los reportes de instituciones como el *Colegio de Ciencias y Humanidades* de la UNAM (Moreno, 2003), la *Universidad Autónoma Metropolitana* (Andreu, 1989); la Unidad Académica Profesional Valle de Chalco (UAPVCh), UAEMEX, reporta en su informe del Programa Institucional de Tutoría (ProInsta), que en los últimos dos ciclos escolares (2001-2002, 2002-2003), tienen respectivamente un 80% y un 75% de reprobados en la materia de Cálculo I que se imparte en la carrera de Ingeniería en Computación. Esto coincide con los reportes presentados por las universidades de educación superior en sus informes de evaluación (Anuies 2003). También en el plano internacional los reportes son frecuentes Artigue (1991), Tall y Vinner (1981), Dreyfus (1990, 124), Skemp (1976), Orton (1983a y 1983b), Heid (1988), Oaks (1990) entre otros. Mediante un análisis de los programas escolares para la integral de Riemann, a nivel medio superior y superior y de entrevistas a docentes se encontró que la forma de impartir esta materia se realiza, en general, de tres maneras:

Una, que llamaremos pseudos-escolástica, inicia con una introducción medianamente formal, de propiedades de sucesiones, series y sucesiones de sumas parciales, para llegar a definir la integral como el límite de una sucesión de sumas parciales. Dada la definición del concepto se comienza a dar un enfoque completamente operativo, en el cual se desarrollan las diversas técnicas o métodos de integración que se aplican a funciones reales “adecuadas”. Finalmente, si el tiempo lo permite, se muestran aplicaciones de la integral en el cálculo de áreas, volúmenes de sólidos de revolución, longitud de arco y ecuaciones diferenciales de primer grado.

La segunda manera consiste en introducir la integral, mediante el concepto de área bajo una curva. Para ello se van introduciendo rectángulos (interiores y/o exteriores) en esta región, cuyas bases son iguales y sobre el eje ***X*,** la altura de cada uno de estos, queda determinada por la curva. Si la base de cada rectángulo se hace cada vez menor, el número de estos aumenta, obteniéndose una mejor aproximación del área de la región que se quiere calcular. Hasta aquí la explicación geométrica es clara. Sin embargo, posiblemente para evitar complicaciones con conceptos como el de límite, se pasa a una representación de la integral como antiderivada. Es decir, se presenta la integral como la operación inversa de la derivada, enseguida se presentan las fórmulas y métodos de integración demostrando algunas de ellas, y se proponen problemas en donde sea posible la aplicación de algunas de estas fórmulas. Bajo este punto de vista, lo más complejo consiste en adecuar él integrando, mediante transformaciones algebraicas permisibles y en algunos casos truculentas, de tal manera que sea posible la aplicación de una fórmula, concluyendo con aplicaciones que en general, no se cubren por la cantidad de objetivos y el tiempo de exposición.

La tercera es una variante de la segunda, es decir, la integral se presenta como la operación inversa de la derivada, para de inmediato presentar las fórmulas y métodos de integración. Después se resuelven una serie de problemas *ad doc* que permiten la utilización de fórmulas y métodos. Y si el tiempo lo permite, finalizan con algunas aplicaciones.

Este estudio muestra una fuerte tendencia a visualizar el cálculo como un patrón de fórmulas y procedimientos algebraicos, dejando fuera los aspectos conceptuales. Pero esto no es sorpresivo puesto que coincide con estudios sobre creencias en alumnos y profesores presentados por Dreyfus (1990, 124), en donde reporta que las investigaciones en Francia exhiben la tendencia de los estudiantes a los aspectos de procedimiento o algorítmicos, dejando fuera los aspectos conceptuales, con tendencia a reducir las matemáticas a una colección de algoritmos algebraicos. En el mismo sentido en Inglaterra, Orton (1983a), reporta que los estudiantes pierden de vista las ideas fundamentales del cálculo debido a las dificultades que experimentan con el álgebra elemental. Asimismo, Davis (1986), en USA, menciona que el cálculo se enseña con fines predominantemente operativos, despreciando y marginando hasta donde sea posible los conceptos y significados precisos, lo que hace que el alumno manipule símbolos que para él carecen de significado. Por su parte Flores (1994) apunta que en la introducción de la derivada, aun persiste su presentación como regla de los cuatro pasos y asociándole escasamente un significado geométrico y físico, esto ha conducido a los estudiantes hacia una mecanización excesiva de los algoritmos del cálculo. Además existen otros resultados importantes de investigación acerca de la integral como el realizado por Cordero (2003):

- Del análisis epistemológico, se encontró un patrón de construcción de la teoría de integración, configurado por la expresión, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en donde la diferencia, y las condiciones de una función derivada juegan un papel definitivo en la discusión.
- A la integral se le asoció un significado por la noción de acumulación.
- Las situaciones que favorecen el pensar de la integral, son los fenómenos de cambio.
- Considerar el área bajo la curva, como modelo geométrico de la integral en una ambientación de variación continua, exige mover lo estático.

Marco teórico

Funciones Integrables: Aunado a la problemática de corte educativo, antes mencionada, debemos agregar una dificultad de orden matemática en el caso de calculo integral. Por ello, para facilitar la cosas en este proyecto, se toman funciones que sean fácilmente integrables polinomios (con coeficientes reales) y cocientes de ellos, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$), donde, se tienen dos opciones:

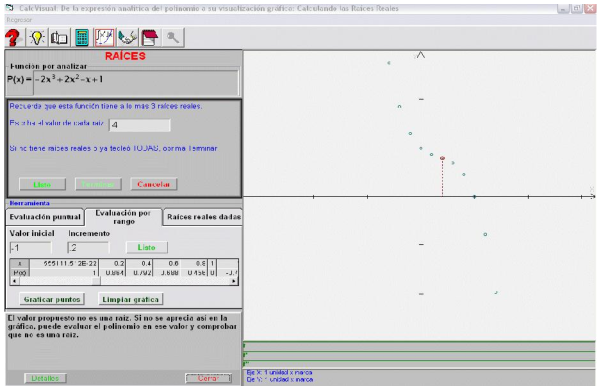
1. E l grado de P(x) es menor al grado de Q(x)
2. El grado de P(x) , es mayor o igual al grado de Q(x)

Para el primer caso, por el teorema fundamental del álgebra y el método de fracciones parciales, tenemos que la integral de R(x) es una función logarítmica, un arcotangente o suma de ambas. En el caso 2, al realizar el cociente; $R(x) = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, con S(x) un polinomio de grado p-q (p=gr(P) y q=gr(Q)), $P_1(x)$ un polinomio cuyo grado es menor a $Q_1(x)$, volviendo al caso 1.

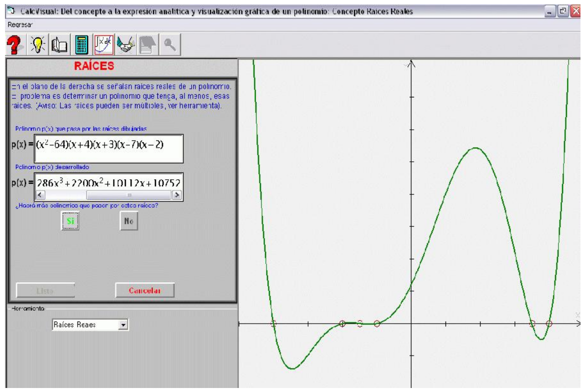
Parte Computacional: Toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos (Wertsch, 1991), la enseñanza de la matemática no es la excepción desde hace años se emplean diversos medios como la escritura, el lenguaje, pizarrón, reglas, la lógica, etc., para mediar la enseñanza de la matemática. El día de hoy la tecnología, mediante los instrumentos computacionales, ofrece una enorme capacidad de procesamiento numérico, gráfico y simbólico que hace evidente el principio de mediación general, en la intención de producir un aprendizaje significativo. Un aprendizaje que no sólo lleve a una destreza aceptable en la algoritmia sino que promueva la comprensión de los conceptos que están inmersos en el cálculo diferencial e integral. Como un sentido de premonición Douglas (1986) expresaba que desde hace más de dos décadas no se ha revisado el currículo de cálculo, y tampoco se ha repensado desde que se dispone de computadoras de gran capacidad numérica y simbólica. Indudablemente el advenimiento de la microcomputadora y los programas computacionales de cálculo simbólico replantean el rol del docente en los cursos de cálculo diferencial e integral. El día de hoy programas como Derive, Mathematica, etc. pueden realizar, mediante el cálculo numérico y simbólico de derivadas e integrales, gran parte de la labor operativa de un curso tradicional de cálculo.

¿De que manera deberá intervenir la tecnología en la educación?, es cuestión que hasta el día de hoy se debate y en este sentido surgen diversas clasificaciones del uso de la computadora en educación como las proporcionadas por: Taylor (1980); Hatfield (1984); Solomon (1987); Hitt (1989); Cuevas (1997), por mencionar algunas. En ellas se clasifica el software desde uso de programas específicos, hasta el aprendizaje de lenguajes sofisticados de computación para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. En todas las clasificaciones, y de hecho como consecuencia de los primeros programas de asistencia a la educación, aparece como una aplicación importante el desarrollo de los llamados Sistemas Tutoriales Inteligentes. El acrónimo ITS (*Intelligent Tutoring System*, Sistema Tutorial Inteligente) acuñado por Sleeman y Brown (1982), surgió en la década de los setentas, como resultado de la combinación de técnicas de la inteligencia artificial y técnicas cognitivas. El objetivo de los ITS, es proporcionar una mayor flexibilidad a los tutoriales manejados por computadora y lograr que éstos permitan una mejor interacción con el usuario. Para lograr este objetivo, es necesario dotar a dichos sistemas con la capacidad de “razonar” y resolver problemas en su dominio de aplicación. Es deseable que los Sistemas Tutoriales Inteligentes sean operativos y mantenibles, para poder aplicarlos en el ambiente educativo. Diversas críticas han surgido a esta propuesta que por supuesto lleva a dos grandes paradigmas, la construcción de un modelo de enseñanza efectivo sin la necesidad de un profesor y la construcción de una teoría del conocimiento. Ambas hasta el día de hoy cuestionables. Lo cierto es que hasta el día de hoy no se cuenta en la enseñanza de la matemática con ningún ITS apropiado o comercializado. Todos los resultados son teóricos.

Una nueva propuesta de un ITS o sistema computacional para el apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha sido desarrollado en el Departamento de Matemática Educativa por Cuevas (1994, 1997, 2003). El planteamiento de Cuevas consiste en debilitar las premisas del un ITS tradicional. La primera, el ITS propuesto por Cuevas, no pretende la sustitución total del profesor, sino más bien ser una herramienta poderosa que sirva como apoyo al profesor, en el planteamiento y resolución de problemas. De esta manera el ITS comparte con el profesor la responsabilidad docente.



Otra diferencia importante es que no posee un modelo de estudiante. En contraste se propone crear un modelo de error estadístico del estudiante mediante la creación de una base estructurada que recoja la expertez de un docente. Si bien este modelo no se anticipa a todas las posibles fallas de un estudiante, posee un modelo factible que permite hacer un análisis de los errores más frecuentes, que comete un estudiante cuando resuelve un determinado problema de matemáticas. Otra diferencia fundamental, es que presenta un tutor no impositivo el cual jamás interrumpe el trabajo de un alumno y sus indicaciones aparecen sólo por invocación del usuario. Por último Cuevas propone que el órgano director del ITS deberá ser la didáctica. Es decir, las diversas facilidades y presentaciones del sistema deberán ser dictadas por una didáctica transparente para el usuario pero fundamental para el desarrollador. Por ejemplo, la estrategia de presentación de los contenidos es responsabilidad de la componente tutorial. Sin embargo, ésta se rige por un modelo didáctico definido y desarrollado por Cuevas (2002) y complementado por Pluvinage (Cuevas&Plivinage 2004). Las principales funciones de este módulo son: dividir el plan de enseñanza en submetas, para sugerir al estudiante una forma de aprender el tema, dosificar los contenidos, guardar registro de las



estrategias generales desarrolladas durante la sesión, presentar a solicitud del usuario, información pertinente y necesaria para resolver el problema propuesto. Así el usuario (generalmente estudiante) interactúa con el ITS en forma individualizada o bajo la tutela de un profesor. La presentación de los diversos temas, se realiza mediante problemas generados en forma aleatoria (esto garantiza un problema diferente por usuario), que al resolverse son evaluados por el tutor. También es responsabilidad del tutor dotar al usuario de una herramienta especial para facilitar la resolución de un determinado problema. Cabe agregar que un sistema como el anterior no compite con manipuladores simbólicos como Derive o Mathematica, o con micromundos como Cabri o Geometra, por el contrario bajo nuestra concepción se complementan.

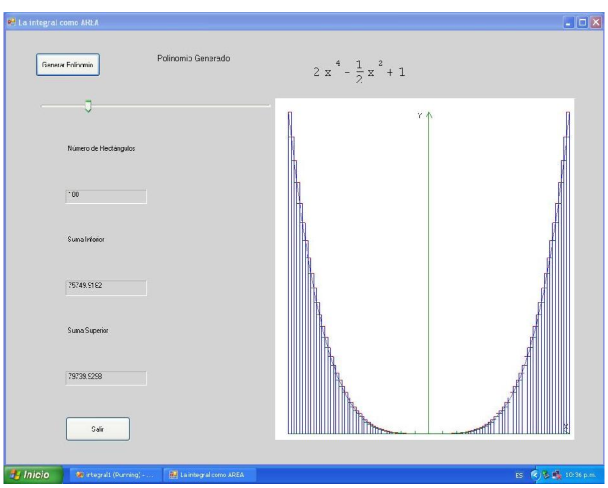
Modelos Educativos: A partir de un estudio histórico crítico y análisis de las diversas corrientes sicológicas en lo concerniente a la sicología del aprendizaje Cuevas y Pluvinage llegan a un cierto modelo didáctico para la enseñanza de la matemática. En el recogen elementos teóricos aportados por las diversos corrientes sicológicas. Por ejemplo, de la enseñanza tradicional o sensual empirista recogen lo importante que es acudir a la intuición. Pero esto, aunado a la escuela activa, carece de sentido si no se acompaña de la acción. Para ellos, haciendo eco de Dewey, Clàparéde y Piaget, la acción es el elemento fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Sin acción jamás se consigue un aprendizaje significativo. De Piaget, retoman las operaciones de la inteligencia indicando con ello que cada vez que se proponga un problema incluir en el mismo la operación inversa. Además y en el mismo sentido se sugiere que para contribuir a la asociatividad de la operación intelectual, jamás se imponga un determinado método o forma de solución. Debido a ello, los STI producidos sólo trabajan mediante la interacción con el estudiante. Evadiendo la gran tentación de producir material altamente vistoso escenografico, Los STI proponen para su desarrollo problemas y sólo actúan ante la interacción del estudiante. En el mismo programa didáctico se incluyen las aportaciones de Duval. Quien mencionan la importancia que, para la adquisición de un concepto matemático, tiene el poder visualizarlo y trabajarlo en los diversos registros de representación semiótica que le sean propios. Frecuentemente se hace énfasis en que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas. Así la distancia entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. Tomando esto en cuenta, se tiene que los objetos matemáticos no son directamente accesibles de la percepción o de una experiencia intuitiva inmediata, como los objetos comúnmente señalados como reales o físicos. Para ello es necesario, poder proporcionar representantes. Por otra parte las representaciones mentales cubren globalmente al conjunto de imágenes, o concepciones que un individuo pude tener sobre un objeto, sobre una situación o sobre lo que le está asociado. De esta manera, las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancía y de funcionamiento. Generalmente, se consideran a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para volverlas accesibles a otros. En este sentido la computación, con la posibilidad de presentar de manera simultánea diversos registros de representación semiótico y brindando además la posibilidad de interactuar entre ellos, nos ofrece una herramienta invaluable para instrumentar estas propuestas de corte psicológico.

Proyecto

El proyecto que se está desarrollando es la creación de un entorno computacional que promueva una mejor comprensión del concepto de integral de Riemann para el nivel medio superior o superior. Este entorno tendrá las características del STI propuesto por Cuevas pero a diferencia del mismo no sólo propondrá problemas para el apoyo de los conceptos y la habilidad requerida sino que también introducirá los conceptos matemáticos.

Metodología

La metodología propuesta bajo el esquema didáctico Cuevas-Pluvinage será introducir el concepto de integral, mediante tres proyectos de acción práctica que son: La integral como área, la integral como antiderivada y la integral como valor promedio.



Para presentar el primer caso, tenemos que el sistema acepta o genera un polinomio de grado y coeficientes aleatorios; del cual sólo se muestra la parte de la grafica comprendida en un intervalo. El objetivo es que el estudiante, al proponer una partición del intervalo visualice tanto geométrica como aritméticamente la aproximación al área definida por la función los ejes y el intervalo; en una tabla anexa ver como gráficamente se calcula el área de dicha región y que el valor de está área coincide con el valor de la integral. Cabe mencionar que la aproximación de área se hace mediante el método de sumas de Riemann, en el cual se suman las áreas de rectángulos tanto interiores como exteriores.

Para el segundo punto (aun en desarrollo) a partir de la derivada de una función se va a construir la función. De esta manera se verá como la integral coincide con la antiderivada.

Tercer proyecto, también en desarrollo

Resultados

La exploración hecha con las primeras versiones de este proyecto, fueron realizadas durante tres años consecutivos, en la en el segundo semestre de la Licenciatura en Informática Administrativa (LIA) , el curso contaba con 48 alumnos, donde el 80% de ellos, tenía conocimientos de calculo. Sin embargo al realizarles una prueba exploratoria, se comprobó que el 85% no recordaba la parte operativa del cálculo. Al finalizar esta primera prueba se comprobó (mediante un *test*) que en términos generales se tuvo una mejoría tanto en la parte conceptual como operativa. La forma de trabajar fue, la siguiente, trabajar con el libro que acompaña al software (CalcVisual), el software, horas en aula (2 horas) y 2 horas en laboratorio de computo (donde los alumnos trabajaban “solos”).

En el segundo y tercer año, se hizo la valoración del programa con dos grupos de alumnos uno de Ingeniería en Computación (ICO), y otro de LIA; cada uno de estos grupos con 45 alumnos, en condiciones semejantes a las antes descritas. Como resultado de esta segunda exploración, también se obtuvieron mejorías significantes, aun mejores que en el primer año. Esto debido a que cambio la forma de llevar el curso, en esta etapa se tenían 2 horas en aula y 2 horas en laboratorio de computo con el software, pero en esta ocasión el profesor permanecía en el laboratorio.

Conclusiones

El uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es hoy por hoy algo incuestionable. Sin embargo, se tiene todavía un largo camino que recorrer en la utilización del mismo para que produzca un aprendizaje significativo. Los entornos de aprendizaje computacionales como el propuesto han mostrado ser de gran utilidad, como lo muestran los resultados de las experimentaciones hechas con CalcVisual (Martínez 2005). Pero no basta, es necesario que la instrumentación de la tecnología en el aula deba observar un contrato didáctico, en donde se especifique, mediante un programa didáctico, claramente el rol de los participantes, a saber: el alumno, el maestro y la tecnología. Ignorar alguno de los elementos señalados contribuiría no sólo a una deficiente comprensión, sino que a la construcción de una matemática aterradora para el estudiante. Por otra parte es necesario que el profesor experimente con diversos tipos de software, puesto que como hemos señalado muchas de las veces se complementan. La propuesta que aquí se presenta y que aun esta en algunas partes en desarrollo, va por esta línea, la de ser un software que sea una herramienta útil tanto para alumnos como para maestros.

Referencias

Andreu Ibarra M. E.,1989, CALCDIFE: Un programa computacional de apoyo didáctico a un curso de cálculo diferencial", Tesis de Maestría, DME, Cinvestav. México

ANUIES 2003. El rendimiento escolar en Ciencias Básicas y su mejoramiento a través de condiciones de estudio apropiadas. México: ANUIES. Disponible en: http://www.anuies.mx/index800.html. Obtenido 15 octubre del 2003.

Artigue, M. 1991. "Análisis". En D. Tall (Ed) Advanced Mathematical Thinkimg. Mathematics Educational Library. Klumer Academic Publisher.

Cordero, F., Muñoz, G & Solís, M., 2003, *La integral y la noción de variación,* Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Cuevas V., C. A., 1994, Sistema Tutorial Inteligente LIREC", Tesis de Doctorado, 1994, DME, Cinvestav, México

Cuevas V., C. A., 1997, "Hacia una clasificación de la computación en la enseñanza de las matemáticas". F. Hitt (Ed). Didáctica II. Investigación en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cuevas V., C. A., 2002. Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas. Manuscrito. DME, Cinvestav, México.

Cuevas V., C. A., 2003. Didáctica. Manuscrito. DME, Cinvestav, México.

Cuevas V., C. A. & Mejía V., H. R., 2003, *Cálculo Visual*, Oxford.

Cuevas V., C. A. & Plivinage, F. 2004. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas.* Manuscrito.

Davis, G. 1986. "Calculus at the University High School". Doouglas R. (Ed). Toward Lean and Lively Calculus (pp. 27-40).

Douglas r., 1986, "Proposal to Hold a conference/workshoop to develop alternate curricula and teaching methods for calculus at college level", Toward Lean and Lively Calculus, pp. 6-15.

Dreyfus, T. 1990. “Advanced Mathematical Thimking” P. Nesher & J. Kilpatrick (Ed). Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the Intenational Group for the Psychology of Mathematics Educations. Cambrige University Press. pp.113-134.

Flores C., D. 1994 “*Hacia una propuesta metodológica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*”, Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa, San José Costa Rica, pp. 55-58.

Hatfield, L., 1984 “Toward Comprrehensive Instructional Computing in Mathematics”, *Computers in Methematics Education.* YearBook, National Council of Teachers of Mathematics, pp 2-9.

Heid, M. K., 1988, “Resequencing Skills an Concepts in Applied Calculus using the computer as a tool”. *Journal for Ressearch in Mathematics Education*, vol. 19, no. 1:3-25.

Hitt, F. 1989.Constructions of functions, contradiction an proof. Proceedings PME XIII.

Martínez R., M 2005. Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para un curso de calculo diferencial. Tesis doctoral no publicada. DME, Cinvestav. México.

Moreno G., S. 2003, Ambiente Computacional para promover una mejor comprensión de conceptos matemáticos. Caso: máximos y mínimos. Tesis doctoral no publicada. DME, Cinvestav, México.

Oaks, A.B. 1990. “Writing to learn mathematics: Why do we need it and how can it help us?”, paper presented at *Association of Mathematics Teacher* of New York State, Conference, Nov.

Orton A., 1983a. “Students' Understanding of Differentiation”, *Educational Studies in Mathematics*, vol.14, no. 3:235-250.

Orton A., 1983b. “Students' Understanding of Integration”, *Educational Studies in Mathematics*, vol.14, no. 1:1-18.

Skemp, R. 1976, “Relational Understanding and Instrumental Understanding”. *Mathematics Teaching.* Vol. 77, pp20-26.

Sleeman, C. & Brown, J. 1982 (ED) *Intelligent Tutorial System*, Academic Press Inc., Inglaterra.

Solomon, C. 1987, *Entornos de Aprendizaje con Ordenadores*, (trad. C. García, titulo original: Computer Environments for children), Ediciones Piados Ibérica, Madrid, España.

Tall, D. & Vinner, S. 1981. “Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity”. Educational Studies in Mathematics. Vol 12, pp.151-169.

Taylor, R., 1980, *The computer in the school*. Teachers College Press. USA.

Wertsch, J. 1991 *Voices of minds: a social-cultural approach to mediated action.* Cambridge, MA: harvard University Press.