Usando tareas cualitativas en la enseñanza de las matemáticas

Armando Sepúlveda - Cynthia Medina
asepulve@umich.mx
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Planteamiento

El uso de procesos de resolución de problemas y la implementación de una forma de trabajo en el aula que combine el trabajo colectivo, en la clase completa y en pequeños grupos, con el individual, son aspectos clave de las orientaciones que actualmente se promueven en la educación matemática. Sin embargo, tradicionalmente la enseñanza de los contenidos se ha visto desligada de estos aspectos y de una selección adecuada de problemas (tareas o actividades). En este sentido, algunos investigadores plantean la conveniencia de utilizar tareas como un medio fundamental de la enseñanza, que promueva un aprendizaje más allá de la memorización de reglas y procedimientos.

En este estudio, reportamos los procesos de pensamiento utilizados por estudiantes de bachillerato, cuando se enfrentaron a un conjunto de problemas diseñados de manera que resulten atractivos y que puedan resolverse de diferentes maneras. Las tareas fueron seleccionadas de los paquetes Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (1999; 2000).

La intensión es ver si las tareas y la forma de instrucción propician la realización de prácticas consistentes con el quehacer de las matemáticas; es decir, que los estudiantes se involucren en la discusión de la tarea (en pequeños grupos y en la clase completa) y tomen casos particulares, planteen conjeturas, descubran patrones y relaciones, hagan generalizaciones e intenten justificar sus resultados. Algunas preguntas que guían el desarrollo de la investigación son: ¿Cómo valoran los estudiantes la utilización de tareas en la enseñanza de las matemáticas y cómo se involucran en el desarrollo de la actividad? ¿Qué habilidades y qué prácticas consistentes con el quehacer matemático se promueven durante la aplicación de tareas cualitativas en nivel bachillerato? ¿Cuál es el papel del profesor durante la implementación de las tareas?

Marco teórico

El aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de cierta disposición de los estudiantes para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear distintas formas de representación al analizar fenómenos particulares, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados (NCTM, 2000); cuando logramos esa disposición de los estudiantes existe la posibilidad de que aprendan con significado los contenidos implicados en las tareas. En este contexto, Santos (1997) establece que

> La resolución de problemas es una perspectiva en la que existe una conceptualización dinámica de las matemáticas y en la cual es importante identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los estudiantes. (p. *viii*)

Además, se reconoce que aprender matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas (Schoenfeld, 1998), donde los estudiantes tienen oportunidad de desarrollar formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina. Estas formas de pensar, han sido identificadas mediante las actividades típicas o estrategias esenciales que un matemático realiza cuando se encuentra inmerso en el proceso de resolver problemas y Schoenfeld (1992) se refiere a ellas como las características del pensamiento matemático. Al hacer una revisión de las actividades ordinarias de un matemático, encontramos que su mayor empeño está en resolver problemas y justificar teoremas para llegar a entender una teoría o teorías relacionadas y así desarrollar nuevos resultados. Su trabajo se caracteriza porque frecuentemente recurre: a la toma de casos particulares; al descubrimiento de patrones y relaciones; al establecimiento de conjeturas; a la generalización; y a la justificación de resultados.

Por su parte, los paquetes de evaluación balanceada (Assesment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000) proponen una serie de problemas entre cuyos elementos para su diseño se consideró: las tareas deben ser fáciles de entender y atractivas para los estudiantes de manera que, al tener contacto con ellas, expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión y el intercambio de experiencias; además, deben incluir contenidos fundamentales del currículum; y por su estructura, debe ser posible recuperar los procesos de pensamiento realizados por los estudiantes en sus intentos de solución. Finalmente, Lesh *et al*. (2000) establece que en el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes exhiben ciclos de entendimiento en las distintas fases de resolución de los problemas, que les permite refinar constantemente sus modelos de solución al pasar de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales de la tarea.

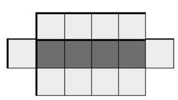
Metodología

Las tareas fueron aplicadas a 15 estudiantes de bachillerato del CBTis 149, quienes participaron voluntariamente por invitación de su profesor de matemáticas. La forma de aplicación de cada una de las tareas contempla varias etapas (Sepúlveda y Santos, 2004): *Actividad previa*. El profesor da una introducción con el propósito de ubicar a los estudiantes en el contexto de la tarea; *Trabajo en equipos*. Durante cierto periodo los estudiantes atacan la tarea en pequeños grupos de tres, al término del cual los equipos entregan su reporte de solución; *Presentaciones*. Cada uno de los equipos presenta su solución ante la clase completa, permitiéndose críticas y opiniones de los demás; *Discusión colectiva*. El profesor promueve la discusión colectiva, con base en las presentaciones de los equipos, para llegar, si es posible, a una solución sistematizada; *y Trabajo individual*. Los estudiantes vuelven a abordar la tarea, en forma individual, e incorporan reflexiones y puntos de vista dados durante la discusión colectiva.

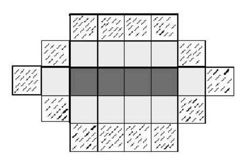
Con el propósito de mostrar el tipo de resultados y análisis a que conduce la implementación de estas tareas, aquí se presenta **Azulejos en la cocina**, la cual fue adaptada y reformulada de su versión original. Es una tarea que involucra el descubrimiento de un patrón y la obtención de un modelo. Se trata de cierta disposición de azulejos en una cocina y predecir el número de azulejos de cada color, necesarios para cubrir cualquier nivel que se pida. El enunciado va acompañado de una serie de figuras formadas por azulejos de colores:

"Alfredo decide cubrir el piso de la cocina con azulejos cuadrados de diferentes colores. Empieza con una fila de cuatro azulejos del mismo color. Enseguida rodea esos cuatro con un borde de azulejos de un color diferente".

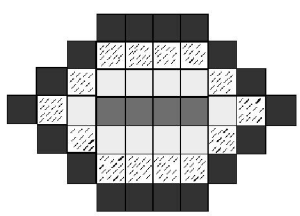
borde 1



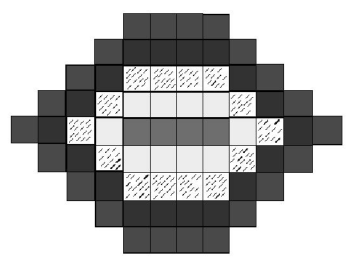
borde 2



borde 3



borde 4



Alfredo hace una tabla con los azulejos que se necesitan para cada borde, ¿cómo se obtienen los números de la segunda columna a partir de los de la primera?

Número de borde	Número de azulejos
1	10
2	14
3	18
4	22

Contesta:

1. ¿Cuál es el número de azulejos en el séptimo borde? Encuentra la fórmula que te indique el número de azulejos que necesitas para cualquier número de borde. Describe cómo encontraste tu fórmula.

2. Emma quiere empezar con cinco azulejos en fila. Elabora una tabla como la de Alfredo y encuentra la fórmula que le permita obtener el número de azulejos para cada número de borde. Muestra cómo obtuviste esos resultados.

Nuestros propósitos son: describir el desarrollo del pensamiento de los estudiantes sobre tipos de variación y ecuaciones; documentar diferentes maneras de pensar cuando interactuaron con las tareas en forma colectiva e individual; y describir el desarrollo de los modelos que establecieron al resolver los problemas.

Resultados

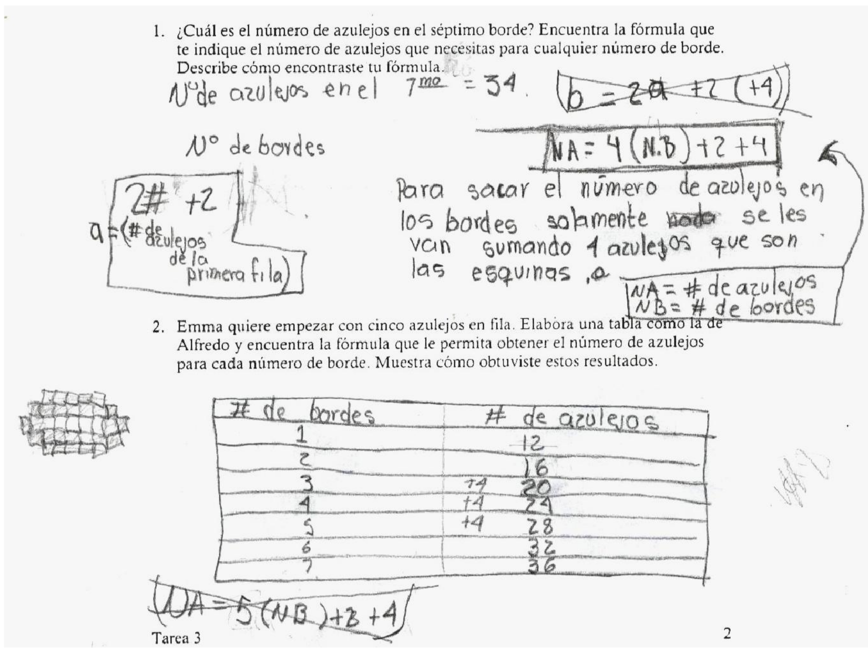
Durante el trabajo en pequeños grupos se observó que los estudiantes distinguieron un incremento proporcional en la segunda columna; sin embargo, hubo distintos acercamientos para encontrar la fórmula de la Pregunta 1. Los equipos A y D intentaron establecer una regla de tres y encontrar una relación entre la segunda y primera columnas, sin lograrlo. El equipo E después de varios intentos logra establecer una regla de tres, al parecer, como resultado de analizar los números en cada una de las columnas, pero no completaron la solución.

El equipo B completó oralmente la tabla hasta el borde siete (la sesión fue audio grabada) para encontrar el número de azulejos. Luego con base en el dibujo, notó que para calcular el primer borde, necesitaban multiplicar 4 por 2 y agregarle los dos azulejos de los extremos; sin embargo, esa fórmula no les permitía encontrar el número de azulejos para los demás bordes y tienen dificultades con el manejo de las variables. Luego de un periodo aproximado de 15 minutos encontraron la fórmula $NA = 4(NB) + 2 + 4$, donde NA representa al número de azulejos y NB el número de borde; finalmente, comprobaron sus resultados con los datos de la tabla. A continuación se muestra parte del diálogo del equipo B, cuyos integrantes fueron Omar [O], Wendy [W] y Dulce [D], cuando discutieron la Pregunta 1.

1. D … *Yo digo que las vayamos sacando al mismo tiempo, porque si sacas primero ésta* [se refiere a encontrar primero la fórmula para la Pregunta 1], *no te va a dar con ésta* [se refiere a la Pregunta 2] *y tiene que ser la misma* [comenta esto mientras su compañero trabaja].
2. W *¡Ahí está!, ¡ahí está!*
3. D *Es que viene siendo lo mismo del doble.*
4. W *No, ¡ahí está!, mira, 3 por 4 que es la primera* [se refiere a la fila inicial] *más dos, más cuatro, 18. Entonces, es que no es el doble, es el número de la primera, por el número de bordes más 2, más 4.*
5. O *¿Qué no era lo que teníamos?*
6. D *Pues más o menos…*
7. W *OK, entonces sería, el número de azulejos es igual a 4 que es el de la principal* [número inicial de azulejos] *por el número de borde más dos de las laterales más cuatro de los extremos.*
8. D *Que es la variable* [se refiere al incremento en cada borde].

Comprueban su resultado, considerando el tercer borde y obtienen el 18. Festejan su triunfo.

Observemos cómo un integrante del equipo supone que la Pregunta 1 y 2 se encuentran relacionadas; es decir, intenta ver una generalización respecto al número inicial de azulejos, sin embargo su compañero sugiere que se centren primero en responder la primera pregunta. La Figura 1 muestra que, al parecer, la fórmula propuesta vino de buscar relaciones entre la primera y la segunda columna de la tabla y luego se le dio el significado a cada constante con base en el dibujo.



1. ¿Cuál es el número de azulejos en el séptimo borde? Encuentra la fórmula que te indique el número de azulejos que necesitas para cualquier número de borde. Describe cómo encontraste tu fórmula.

N° de azulejos en el 7mo = 34.

~~$b = 2a + 2\ (+4)$~~

$\boxed{NA = 4(N.B) + 2 + 4}$

N° de bordes

2# + 2

a = (# de azulejos de la primera fila)

Para sacar el número de azulejos en los bordes solamente ~~nada~~ se les van sumando 4 azulejos que son las esquinas.

NA = # de azulejos
NB = # de bordes

2. Emma quiere empezar con cinco azulejos en fila. Elabora una tabla como la de Alfredo y encuentra la fórmula que le permita obtener el número de azulejos para cada número de borde. Muestra cómo obtuviste estos resultados.

# de bordes		# de azulejos
1		12
2		16
3	+4	20
4	+4	24
5	+4	28
6		32
7		36

~~$NA = 5(NB) + 2 + 4$~~

Tarea 3 2

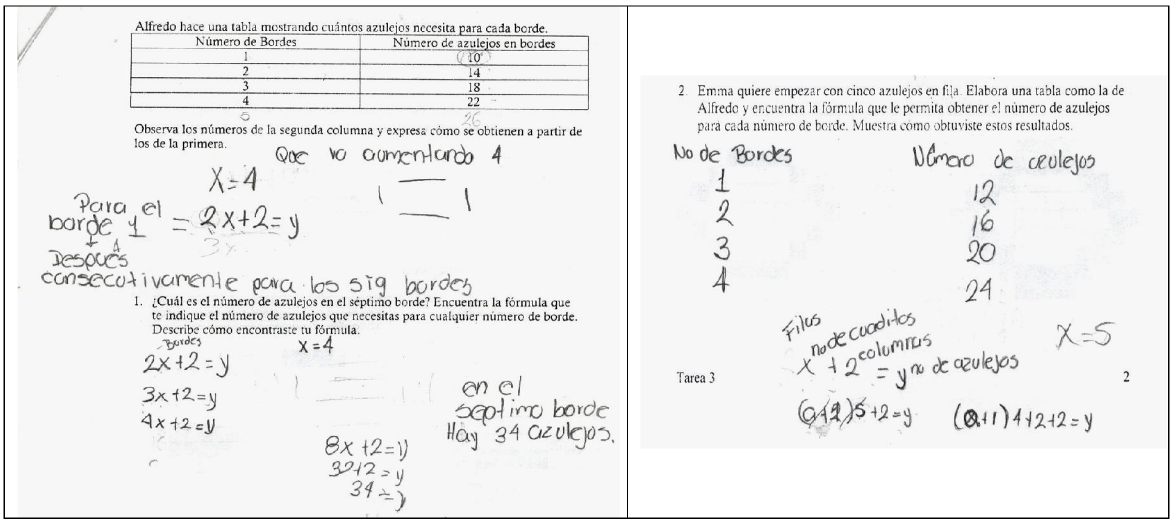
Figura 1. Trabajo realizado por el equipo B en la Pregunta 1.

El equipo C, en cambio, observó el dibujo y notó que para el primer borde se dobla el número de la fila (4) y luego se le suman 2 azulejos (los que están en los extremos), obteniendo la fórmula $nx + 2 = y$; donde $x = 4$ (fila inicial de azulejos), y es el número de azulejos y n es el número de bordes más 1. Para la Pregunta 2 elaboraron la tabla y propusieron inmediatamente la fórmula $n5 + 2 = y$; consideraron que a la fórmula de la Pregunta 1 sólo bastaba cambiarle el número inicial de azulejos, pero al hacer las comprobaciones con los datos de su tabla notaron que la fórmula no era correcta, como se muestra en la Figura 2. En el equipo C, integrado por Jessica [J], Guadalupe [G] y Mariana [M], se dio el siguiente diálogo:

1. J *… En cada uno se va aumentando 4.*
2. G *…El 2 se lo puse porque va arriba de 4 y abajo del 4, son 4 más 4 nos da 8, más 2 de las dos orillas nos da y, x la puse como x = 4, luego en la siguiente como son 3…*
3. M *¿Qué no serían 4 más? aumenta una arriba y una abajo, o sea que en total serían 4.*
4. G *Tres para que le siga, porque es el que sigue consecutivamente… 3 por x son 12 más dos, 14 y nos da y, en la siguiente sería 4 por 4, 16, más dos nos da 18…*
5. J *Más bien, nada más pon 7x +2.*

6. G ´…*No pero sería* $8x+2=y$…[notaron que deben agregarle uno al número de borde pedido], *en el séptimo borde hay 34 azulejos* [después discuten la forma en que deben escribir la fórmula para la segunda pregunta].
7. M …*Más bien, x representa el número de cuadritos que están fijos por el número de filas* [se refiere al número de bordes] *más dos* [sustituyeron 5 (el número de cuadritos fijo) en la fórmula propuesta y comprobaron para el primer borde de la Pregunta 2, obteniendo un resultado distinto al de la tabla].
8. G *Era demasiado bueno para ser verdad.*

El diálogo muestra el problema del manejo de las variables y constantes. Es importante notar que este equipo, a diferencia del equipo B, empieza su análisis con base en el dibujo.



Número de Bordes	Número de azulejos en bordes
1	10
2	14
3	18
4	22

Figura 2. Trabajo mostrado por el equipo C.

Durante las presentaciones, el equipo A se propuso encontrar el número de azulejos en un determinado borde, elaborando una tabla hasta llegar al mismo; comentaron que ello da la solución a dicha pregunta.

Hubo opiniones a favor y en contra hasta que Wendy, integrante del equipo B, expuso la fórmula obtenida por su equipo $NA = 4(N.B)+2+4$, explicó cómo llegaron a ella y qué representa cada variable y cada constante. Esta fórmula convenció a la mayoría del grupo como una respuesta correcta.

El equipo C manifestó que tenían una solución distinta; propusieron en el pizarrón la expresión $2x+2=y$, aclarando que el primer 2 es para calcular el borde 1 y para calcular determinado borde se tendrá que sustituir el número de borde requerido más uno, para así encontrar el número de azulejos buscado; además, la *x* equivale al número inicial de azulejos (en el caso de la Pregunta 1, x = 4). Es claro que las integrantes de este equipo tienen una confusión en el uso de variables y constantes, lo cual generó discusión en toda la clase.

El profesor intervino para ver si era posible que los estudiantes asignaran correctamente las variables y constantes. Con la intervención del equipo B, entre otros, la fórmula presentada por el equipo C se transformó en $(x+1)4+2=y$; un integrante del equipo E hizo notar ante el grupo que esa expresión corresponde a la misma fórmula que la presentada por el equipo B, salvo por la forma de escribirla.

Para la Pregunta 2, en la que se inicia con cinco azulejos, un estudiante del equipo E propuso la fórmula $y=4x+8$ y justificó que las figuras son parecidas a las de la Pregunta 1, pero agregándole dos azulejos; esto lo llevó a concluir que sería la misma fórmula más 2. Enseguida, una integrante del equipo C pasó al pizarrón y aclaró la idea de su compañero; escribió la fórmula $(x+1)4+2+2=y$. El grupo se convence y genera su curiosidad por predecir la fórmula variando el número inicial de azulejos. Cabe mencionar que el equipo C, en su trabajo inicial en pequeños grupos, en la Pregunta 2, propuso la fórmula $n5+2=y$, la cual no les resultó al hacer comprobaciones numéricas.

En esta tarea fue notable el avance que tuvo la mayoría de los estudiantes; inicialmente tenían problemas de entendimiento de la tarea, después de las presentaciones y discusión colectiva la resolvieron rápidamente y mostraron habilidad en la búsqueda de relaciones entre los datos. El trabajo individual muestra que todos los estudiantes dan una respuesta correcta a las dos preguntas. En sus explicaciones hay claridad de lo que se pide en los enunciados e incorporan las reflexiones generadas en la clase completa; incluso, algunos se plantearon preguntas que van más allá de lo requerido en la tarea, como se muestra en la Figura 3. Obsérvese cómo Jessica fue capaz de realizar una extensión de la tarea (en la “nota”); estableció verbalmente una generalización de la regla que permite calcular el número de azulejos para cada borde, iniciando con distinto número de azulejos.

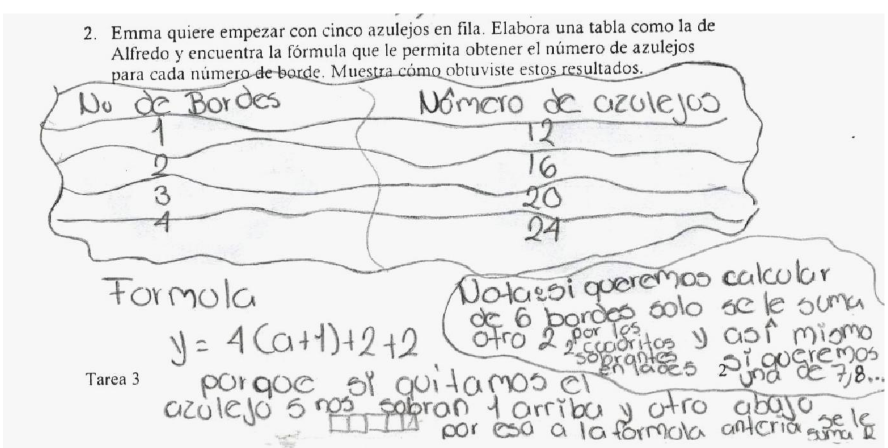


Figura 3. Trabajo realizado por Jessica, del equipo C.

Conclusiones

Los estudiantes mostraron interés por participar en la actividad y después de la introducción en cada tarea, manifestaban entusiasmo y disposición por contestar cada pregunta. En el trabajo en equipos, fue posible identificar contribuciones que muestran distintas cualidades matemáticas y cuando los estudiantes hicieron sus presentaciones, compartieron y criticaron las fortalezas y limitaciones de los métodos de solución de los demás.

La forma de trabajo en el aula y las cualidades asociadas a las tareas permitió que los estudiantes practicaran los pasos establecidos en el método de Polya (1945) y arribaran a la solución: tanto en los equipos como en la clase completa, la discusión giró en torno al esclarecimiento de qué es lo que se pregunta, cuáles son los datos, etc.; surgió un plan de ataque al problema, a veces en forma individual o colectiva; se llevó a cabo el plan usando distintos recursos matemáticos que incluyen trazos, arreglos numéricos, operaciones, aplicación fórmulas, etc.; y obtuvieron resultados que fueron comprobados o revisados para ver su pertinencia como solución.

Referencias

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 2.* (1999; 2000). White Plains, N. Y.: Dale Seymours Publications.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co.

Schoenfeld, A. H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. *Research in Collegiate Mathematics Education III.*, pp. 81-113.

Sepúlveda, A., Santos, M. (2004). Developing Understanding in Mathematical Problem-Solving. A Study with High School Students. En McDougall, D.E. & Ross, J.A. (Eds.). (2004). *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto: OISE/UT, pp. 499-506.

Palabras claves

Resolución de problemas. Tareas cualitativas. Ciclos de entendimiento.