

# LA COMPLEJIDAD DEL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS FIGURALES, EL CASO DE LOS PUNTOS

Claudia Margarita Acuña Soto. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN.

## PLANTEAMIENTO

Los estudiantes, aun los de bachillerato, confunden con frecuencia propiedades de la representación con el objeto representado, por ejemplo, aceptar que las rectas están formadas por una infinidad de puntos, representa un obstáculo epistemológico para los estudiantes.

Las ideas que el estudiante asocia a los objetos de la vida cotidiana se ven reflejadas en su quehacer en el aula, en el caso de los objetos, su existencia está precedida por sus manifestaciones concretas; en el caso de los puntos, por su representación a través de un rasgo sobre una superficie.

Consideramos en este trabajo la necesidad de observar el proceso a través del cual los estudiantes enajenan las propiedades conceptuales de la representación gráfica y sus componentes figurales.

Propusimos a 149 estudiantes de bachillerato, un cuestionario en el que se solicita localizar puntos con base en propiedades relacionadas en sus ordenadas y sus abscisas; habiendo constatado que los estudiantes localizan puntos sobre el plano bajo las normas analíticas, les proponemos identificar los puntos de una gráfica que tienen mayor ordenada o abscisa que los demás.

En particular, deseamos saber, cuáles consideran nuestros estudiantes que son los “puntos” sobre la gráfica, las marcas colocadas al inicio y al final de la gráfica en forma de pequeños círculos, o el rasgo determinado por su posición definida.

## MARCO TEÓRICO

Para los fines de interpretación y construcción de la gráfica, es importante destacar que el punto gráfico es un concepto figural, Fischbein (1993), es decir, éste puede ser pensado con base en sus propiedades conceptuales (sin dimensión, por ejemplo) o de sus propiedades figurales (la posición, por ejemplo).

Los ejes coordenados son los referentes que organizan las relaciones analíticas o numéricas en el plano cartesiano y se acompañan de dos figuras, la figura fondo (ejes, cuadrícula, marcas de

escala) y una figura forma (la gráfica).

El punto, es frecuentemente interpretado por nuestros estudiantes con propiedades que le vienen de su representación gráfica actual, es decir, del dibujo<sup>1</sup> que lo representa. El estudiante suele considerar puntos con grosor, volumen o peso, Tsamir (1997) estas ideas acompañarán la interpretación gráfica hasta que los estudiantes acepten una idea abstracta de punto. Herscovics (1980); Dunhan y Osborne, (1991) han encontrado evidencias de que los estudiantes piensan y usan más bien un objeto físico que un objeto ideal

Desde el punto de vista de sus relaciones analíticas la opinión de Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi (1993) da cuenta de la dificultad que muestran algunos estudiantes de bachillerato con la interpretación de gráficas de rectas; estos no podían vincular significativamente las representaciones gráficas de pendiente y ordenada al origen con las correspondientes representaciones algebraicas asociadas incluso numéricas de estos objetos gráficos, pese a tener un buen manejo y conocimiento de ambas representaciones.

Los autores sugieren entonces, que se requiere de un vínculo explícito para hacer la identificación entre estas representaciones, es decir la *conexión cartesiana* que consiste en tener en cuenta que “un punto está sobre la gráfica de la recta L si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación” Schoenfeld, Smith y Arcavi (1993, p 73). La conexión cartesiana, desde el punto de vista analítico, responde indirectamente a la necesidad de concebir a la recta como la unión infinita de puntos, Karlake (1977) citado en N. Herscovics (1980) ha sugerido que la mayoría de los estudiantes no piensan en una recta como una unión infinita de puntos, de hecho algunos conciben que “solamente un número finito de puntos podría ser dibujado sobre un segmento de recta” (Herscovics, op cit p. 362).

La pertenencia de un punto a la recta desde el punto de vista analítico, no aclara por completo la relación entre ellos, debido a que, para graficar se requiere de un cierto tipo de interpretación que no queda resuelto por la pertenencia y esto es porque se pueden establecer múltiples relaciones figurales que son, posiblemente más sugerentes. En particular Moschkovich (1999) detecta que muchos estudiantes consideran que tanto la ordenada como la abscisa al origen de una recta, deben estar reflejadas en la ecuación, ya que ambos puntos de intercepción son relevantes en la

---

<sup>1</sup> Dibujo: representación presente que da cuerpo a la gráfica. La idea de dibujo se contrapone a la de figura que considera a la gráfica como un representante de todas las posibles representaciones de lo representado.

gráfica asociada a la recta y la autora pasa a considerarlo como un preconcepto debido a que esta idea es perdurable en ellos.

Resulta frecuente ver que la interpretación que hacen los estudiantes de los signos gráficos (es decir, de aquellos con carácter ostensivo), no tiene relación con la expresión algebraica, particularmente con la ecuación (de carácter no ostensivo) Desde el punto de vista del vínculo entre signos y sus propiedades tenemos que establecer relaciones entre diferentes dos tipos de representaciones distintos: el gráfico y el algebraico, Duval (1999) en el presente caso se trata de la conversión entre parejas ordenadas y puntos gráficos, aquí sólo atendemos la relación en esa dirección.

En el tratamiento de la gráfica en términos de sus signos y significados asociados, es preciso distinguir un doble carácter de la representación: como dibujo y como figura, Laborde y Caponni (1994). Como dibujo la representación gráfica deriva sus atributos de la representación presente y como figura hará referencia a las propiedades genéricas, de la cual, la expresión gráfica presente no es más que una instancia. El punto o marca presente es un dibujo, el punto infinitamente pequeño inmerso en una recta, corresponde a idea de la figura del punto que es, en si mismo, un ente abstracto. Esta relación entre las dos entidades: representante y representado, es la que provee una base para desarrollar un razonamiento que permita la interpretación de las gráficas cartesianas

## METODOLOGIA

Propusimos a 149 estudiantes de bachillerato, de 16 años como promedio, un cuestionario que nos permitiera observar el manejo de propiedades cuantitativas: Comparar la relación mayor-menor de puntos con igual ordenada o abscisa y cualitativas: Localizar puntos dada la pareja ordenada para lo cual debían diferenciar las relaciones mayor-menor y ordenada-abscisa , negativo-positivo.

En este cuestionario se propusieron las tres parejas de gráficas que aparecen en la tabla 1.

La diferencia entre ellas radica, para los fines de la exploración, en la aparición de marcas al inicio y al final de las gráficas de las preguntas 13, 12 y 14 con una pequeña traslación obtenemos las gráficas restantes.

La hipótesis original de este trabajo era que: pese a manejarse correctamente en el uso de la localización de puntos, la mayoría de los estudiantes serían atraídos por las marcas, y que esta

idea permanecía consistente pese al tratamiento gráfico, es decir que se trataba de una concepción.

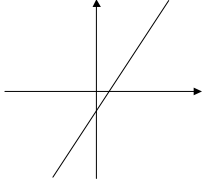
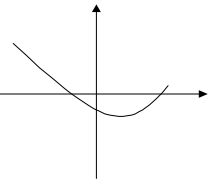
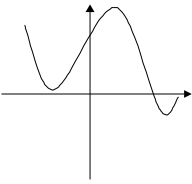
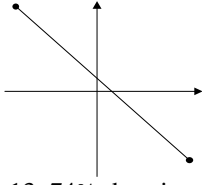
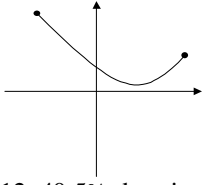
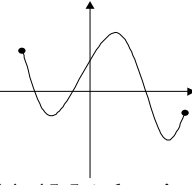
Marca con una cruz el punto de mayor ordenada en esta recta de la que solamente dibujamos un pedazo	Marca con una cruz la menor ordenada en la curva que presentamos aquí, dentro de la zona dibujada	Marca con una cruz el punto de mayor ordenada en la siguiente gráfica, en la zona dibujada
 <p data-bbox="245 709 477 737">p.15, 94% de aciertos</p>	 <p data-bbox="618 709 873 737">p.17, 73.3% de aciertos</p>	 <p data-bbox="992 709 1263 737">p.16, 81.5% de aciertos<sup>2</sup></p>
 <p data-bbox="245 951 477 978">p.13 74% de aciertos</p>	 <p data-bbox="618 951 873 978">p.12, 40.5% de aciertos</p>	 <p data-bbox="992 951 1263 978">p.14, 45.5% de aciertos</p>

Tabla 1. Las gráficas propuestas a los estudiantes

## RESULTADOS

Los resultados nos sugieren que: 1. los estudiantes de bachillerato se manejan correctamente en general en la localización de puntos sobre el plano, los errores se centran en la contabilización de las unidades de desplazamiento al localizar puntos y se presentan algunas confusiones al tomar ordenada por abscisa o un eje por otro, pero en general manejan bien el algoritmo de la localización de puntos en el plano.

2. Las marcas colocadas en los extremos de las curvas si llaman la atención de muchos de nuestros estudiantes, y son motivo de error en las respuestas, sin embargo, observamos la aparición de otro tipo de errores no previstos como las intercepciones de las rectas o curvas con los ejes coordenados que fueron eventualmente consideradas como “los puntos”.

Los resultados de la identificación de los puntos sobre las gráficas son los siguientes:

<sup>2</sup> Pese a que hay gran discrepancia en nuestro medio respecto a lo que es precisamente una creencia, en este trabajo estamos tomando la opción que define a la concepción como una creencia arraigada y consistente como en Tirosh & Stavy (1999)

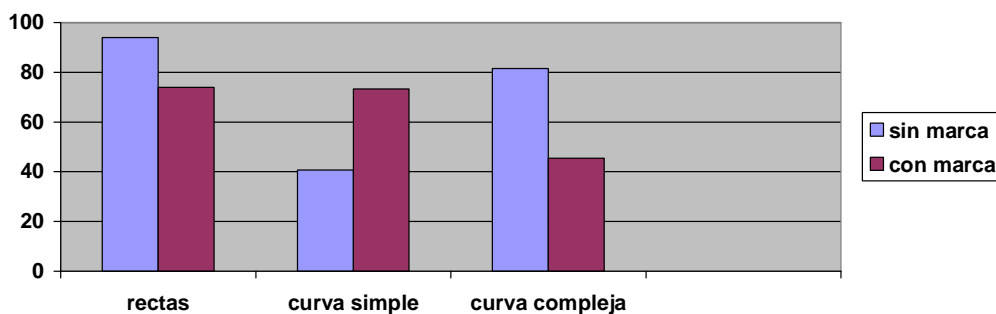


Tabla 2. Resultados de la tarea de identificación de puntos sobre las gráficas

La consigna de las rectas y de las curvas complejas era la misma.

La mayor cantidad de respuestas correctas en las parejas, no siempre corresponde a las gráficas sin marcas como podemos ver en la curva simple, también encontramos en este par de gráficas mayor número de aciertos que en la curva con marcas, que sin ellas.

Los resultados correctos de las rectas con marcas y las curvas simples con marcas, están muy cerca de la curva compleja sin marcas.

De igual manera, tenemos que las frecuencias de respuestas correctas entre curva simple sin marcas y curva compleja con marcas están muy cercanas.

## CONCLUSIONES

Estos resultados nos sugieren por un lado, que la frecuencia de respuestas correctas de las gráficas no es homogénea, pese a la consigna se a la misma, como vemos en las gráficas de las rectas y las curvas complejas, por lo que es posible que otra variable visual está participando en la identificación de los puntos.

Las respuestas correctas en las curvas simples anula la hipótesis de que las marcas, por si solas, comprometen la atención de los estudiantes, también llama la atención que las curvas simples sin marca tengan una frecuencia tan parecida a las de las curvas complejas con marcas lo que sugiere que no es la presencia de la marcas el mayor atractivo en las gráficas.

Consideramos finalmente que los estudiantes pueden, eventualmente, dejarse llevar por la idea de que las marcas son los puntos que detectamos sobre el plano, pero que en situaciones visualmente mas complejas, tienden a hacer un análisis más cuidadoso de la situación, encontrando otro tipo de indicadores que guían sus respuestas, especialmente cuando las gráficas se hacen mas complejas, es posible que, en nuestra investigación, la gestalt de la curva influya de manera que la atracción hacia las marcas no es más que otro elemento que participa en la representación de la

gráfica, que puede llevar a error, pero que no se trata de una concepción o idea consistente sobre lo que significa un punto sobre la gráfica.

**Palabras claves: Concepto-figural; Representación; Gráficas**

## **BIBLIOGRAFÍA**

DUVAL R. 1999 Representation, vision and visualization cognitive function in Mathematical thinking , *Proceedings of the twenty first Annual Meeting PME-NA* v 1.

FISCHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics* 24 139-162

HERSCOVICS N. (1980) Constructing meaning for linear equations: a problem of representation, *Recherché en Didactique des Mathematics*, 1 (3) 351-385

KERSLAKE D. (1977) The Understanding of Graphs, *Mathematics in school* 6(2) 22-25

MOSCHKOVICH J. (1999), Students' use of x-intercept as an instance of a transitional conception, *Educational Studies in Mathematics* 37 169-187

MOSCHKOVICH J. SCHOENFELD A. and ARCAVI A., (1993), Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them, *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, Studies in Mathematical Thinking and Learning series, 69-100.

DUNHAM P.H. and OSBORNE A. (1991) Learning to see: Students' Graphing Difficulties, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 13 ( 4)

SCHOENFELD A. , SMITH y ARCAVI A. 1993, Learning : The Microgenetic Analysis of One Student' s Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain, *Advances in instructional psychology*, Ed. Hillsdale, JN: Lawrence Erlbaum Associates, 4 55-175

TIROSH D. and STAVY R. (1999) Intuitive Rules: a way to explain and Predict Students' Reasoning, *Educational Studies in Mathematics* 38 .51-66

LABORDE C. y CAPONNI B., (1994), Cabri-géomètre d'un Milieu pour Apprentissage de la notion de Figure Géométriques, *Recherché in Didactique des Mathématiques*, v. 4 No. 12, pp. 165-210