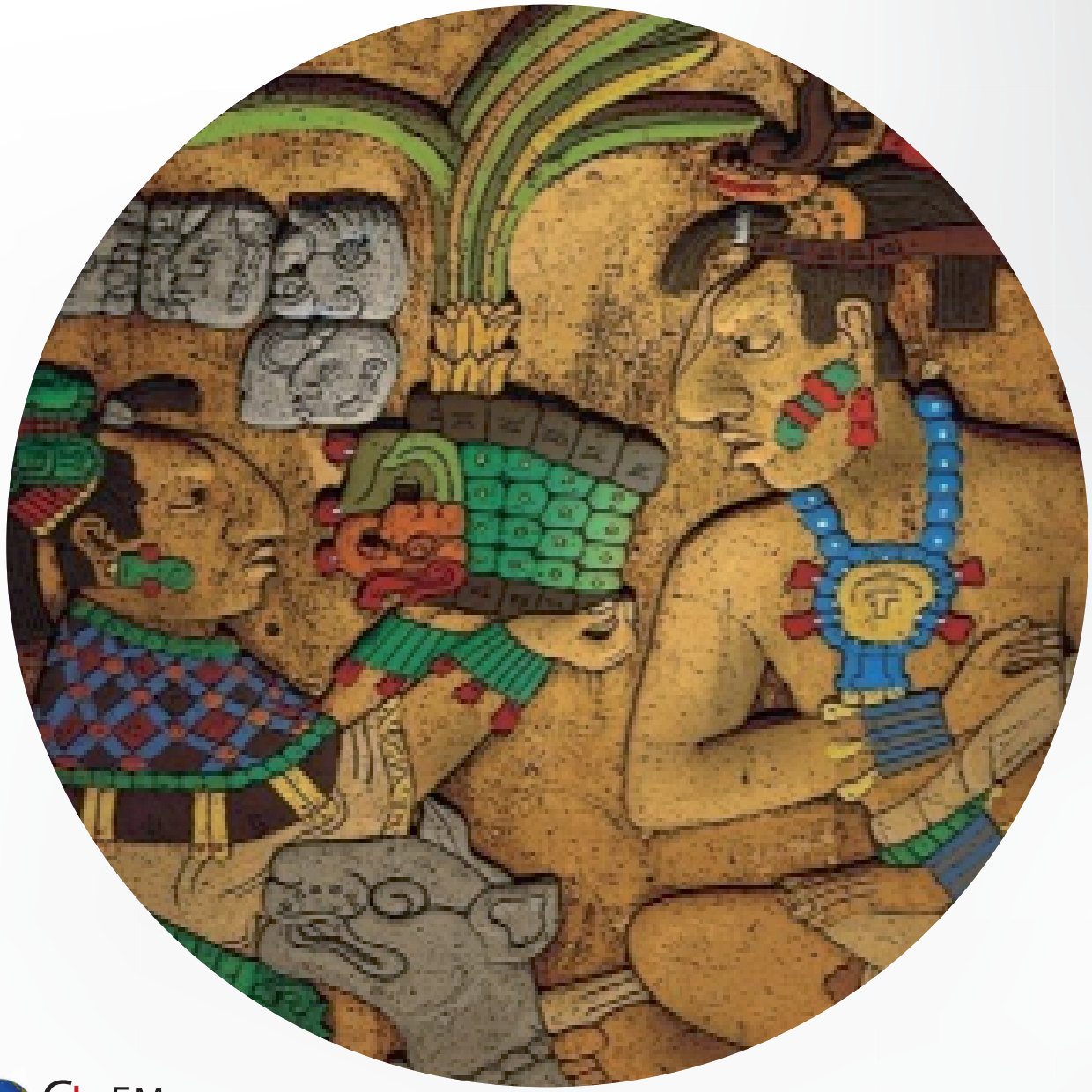
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 12: Historia y Epistemología



CIAEM CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 12: Historia y Epistemología
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-09-5
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 12: Historia y Epistemología*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

A pesquisa em história da Educação Matemática nos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática 1-12
Francisco da Silva Gonçalves-BR, Iran Mendes-BR

Análise de livros didáticos de Matemática de escolas primárias a partir da análise de conteúdo de Bardin 13-22
Malcus Kuhn-BR, Arno Bayer-BR

Análisis de contenido: el primer libro de texto de Matemáticas editado en Costa Rica 23-32
Miguel Picado-CR

Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad 33-41
Diana Quintero Suica-CO, Nathalia Valderrama Ramírez-CO

As escolas do formalismo, logicismo e intuicionismo: um olhar para o ensino da Matemática 42-53
Daniel Loureiro-BR, Tiago Klüber-BR

As reformas pombalinas da instrução pública e o ensino de Matemática 54-64
Fabiane Mondini-BR, Maria Viggiani Bicudo-BR

As Ternas Pitagóricas e números congruentes: uma breve história 65-76
Inocêncio Fernandes Balieiro Filho-BR, Jaime Apaza-BR, Nair Rodrigues-BR

Educação Matemática: uma breve gênese e algumas reflexões sobre sua história 77-84
Miguel Jocelio Alves da Silva-BR, Maria do Carmo de Sousa-BR

La historia de la Matemática en libros de texto para el tercer ciclo de la educación general básica en Costa Rica durante 1948-2012 85-96
Patricia Cortés-CR, Noemí Lezcano-CR, Grettel Mora-CR, Miguel Picado-CR

La Matemática en las escuelas de los jesuitas en el Rio Grande del Sur 97-107
Silvio Britto-BR, Arno Bayer-BR

Los problemas de aligación 108-119
Bernardo Gomez Alfonso-ES

O movimento histórico e lógico dos conceitos e a constituição do objeto de ensino da Álgebra 120-130
Maria Lucia Panossian-BR, Manoel Moura-BR

O uso da história da Trigonometría no ensino 131-139
Eline Victer-BR, Jurema Lopes-BR, Carlos Souza-BR

Reconstrucción del significado holístico de la Antiderivada 140-151
Wilson Gordillo Thiriat-CO, Luis Pino-Fan-CL

Um referencial teórico para investigar as concepções de alunos de graduação em Matemática sobre demonstrações 152-162
Inocêncio Fernandes Balieiro Filho-BR

Un estudio socioepistemológico de la epistemología de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento matemático 163-176
Karla Sepulveda Obreque-CL, Javier Lezama Andalón-MX

Una deriva en tiempos la obra de Galileo 177-185
Leonora Díaz Moreno-CL, Jaime Arrieta Vera-MX

Uso de carta histórica para abordagem da Teoria de Grafos no ensino médio 186-195
Lauro Sá-BR, Sandra Silva-BR

Utilización maya de los grandes números 196-208
André Cauty-FR

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A pesquisa em história da Educação Matemática nos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática no Brasil

Francisco Djnnathan da Silva **Gonçalves**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
djnnathan@yahoo.com.br
Iran Abreu **Mendes**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil
iamendes1@gmail.com

Resumo

O presente artigo apresenta um recorte de uma pesquisa apoiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, desenvolvida na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Nosso objetivo é analisar os artigos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), ocorridos entre 1987 a 2010, que trataram da História da Matemática em suas múltiplas tendências de pesquisas. O intuito deste recorte é mostrar como as pesquisas em História da Matemática têm se consolidado durante esses encontros, para caracterizarmos sua configuração e seus desdobramentos na formação de professores que ensinam matemática. Neste espaço, nos apoiamos na pesquisa feita nos Seminários Nacionais de História da Matemática, concebida por Mendes (2008, 2010, 2014) e apropriamos dos conceitos de história e memória, história das disciplinas e história das instituições, de modo a favorecer o entendimento das abordagens que foram identificadas nesses Anais. Com isso, apresentamos os principais elementos que demonstram a consolidação das pesquisas em Educação Matemática no Brasil.

Palavras chave: História da Matemática, Encontro Nacional de Educação Matemática, História das Instituições, História da Educação Matemática, Pesquisa.

Introdução

O desenvolvimento de pesquisas na área da Educação Matemática pautada em encaminhamentos acerca da observação e/ou análise de produções disponíveis em anais de congressos, de modo a propiciar reflexões sobre tais pesquisas remete ao estudo que denomina-se como "pesquisa da pesquisa"(Vielle, 1981), que norteia reflexões caracterizadas por estudos que visam os processos de produção do conhecimento, com análises que justificam e desvelam as tendências adotadas nessas produções.

É necessário salientar que o estudo aqui apresentado constitui-se numa análise epistemológica que são mais amplas do que os estudos do tipo estudo da arte. Neste sentido, identificamos elementos que vão além dos objetos de estudo, ou simplesmente, referenciais teóricos utilizados, possibilitam aprofundar outros itens, como articular os elementos que

favorecem na determinação de vazios conceituais e desvelar as perspectivas teóricas de uma área em particular (Sánchez Gamboa, 2007). E, assim, o estudo epistemológico apresenta o conhecimento como uma produção de pensamento, estabelecendo relações que constituem e/ou estruturam uma determinada realidade.

Desse modo, articulamos o estudo epistemológico da pesquisa reativa ao campo educacional, com a preocupação de conceber a realidade, as abordagens metodológicas, entre outros. O nosso intuito remete-se ao favorecimento das ações em prol de uma educação matemática mais significativa. Para tanto, devemos destacar a criação, a partir da década de 1980, dos primeiros programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e em consequência surgiram às primeiras linhas de pesquisa em Educação Matemática no Brasil.

Assim, a pesquisa que ilustramos corrobora com os aspectos formativos dessa área do conhecimento, apresentando uma breve caracterização dos Encontros Nacionais de Educação Matemática que ocorreram entre 1986 a 2010.

Caracterização dos ENEM

O I Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, na semana de 2 a 6 de fevereiro de 1987, que registrou 550 inscritos, dos quais 136 apresentaram trabalhos que promoveram discussões de pesquisas desenvolvidas nas diversas instituições existentes no país.

O II ENEM ocorreu na Universidade Estadual de Maringá, no estado do Paraná, entre 24 a 29 de janeiro de 1988 com os objetivos de reunir profissionais das áreas de Matemática, Pedagogia, Psicologia, bem como pesquisadores em Educação Matemática, em busca de caminhos para melhoria do ensino de matemática em todos os níveis e propiciar a troca de experiências e caracterizar a Educação Matemática como área de estudos interdisciplinar. Destacamos como um dos pontos principais deste ENEM, a aprovação do Estatuto da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, bem como a primeira eleição para a direção desta Sociedade e a apresentação de 185 trabalhos em forma de palestras, comunicações, minicursos, mesas redondas, entre outros, que tratavam sobre os diferentes aspectos da educação matemática.

O III ENEM foi realizado, no período de 22 a 27 de julho de 1990, em Natal/RN, pela SBEM e coparticipação a Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, com o objetivo de favorecer o debate sobre educação matemática e buscar alternativas para superar os problemas no ensino da matemática. No referido encontro foram inscritas 1041 pessoas, com pelo menos um representante de cada estado brasileiro, com exceção do Maranhão. O IV ENEM ocorreu na Universidade Regional de Blumenau, em Blumenau/SC, no período de 26 a 31 de janeiro de 1992, com o surgimento de uma temática que os autores dos trabalhos deveriam seguir: Educação Matemática & Ciências, Tecnologia e Sociedade. Os objetivos estavam centrados no intercâmbio entre instituições e pesquisadores, bem como na divulgação de comunicações sobre pesquisas, estudos e experiências, com estratégias para a prática da Educação Matemática.

O V ENEM foi realizado na Universidade Federal de Sergipe, em Aracaju/SE, no período de 16 a 21 de julho de 1995, contou com 1017 inscritos do Brasil e pesquisadores do exterior. O VI ENEM ocorreu no período de 21 a 24 de julho de 1998, na Universidade do Vale do Rio dos Sinos, localizada em São Leopoldo/RS, e contou com 2 390 participantes e cerca de 500 trabalhos apresentados.

O VII ENEM foi realizado no período de 19 a 23 de julho de 2001, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, juntamente com o Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, com ênfase no intercâmbio de pesquisas e experiências docentes e a divulgação da produção científica aos pesquisadores e professores que trabalham com o ensino de Matemática.

O VIII ENEM ocorreu em Recife/PE, na Universidade Federal de Pernambuco, de 15 a 18 de julho de 2004, tendo sido organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. O ENEM se consolidou como um evento do qual participaram professores que ensinam matemática, bem como, alunos dos cursos de Matemática (licenciatura), Pedagogia, entre outros, que objetivavam divulgar a produção científica e trocar experiências no campo da Educação Matemática. O referido encontro contou com cerca de 2000 pessoas inscritas que realizaram diversas atividades como: 1 Painel, 16 Palestras, 28 Mesas Redondas, 140 Minicursos, 166 Comunicações científicas, 58 Pôsteres e 70 Relatos de experiências, 3 exposições de materiais didáticos.

O IX ENEM aconteceu no período entre 18 a 21 de julho de 2007, em Belo Horizonte/MG, na Universidade de Belo Horizonte - UNI-BH, coordenado por Marcelo Câmara dos Santos. O encontro aconteceu sob o tema "Diálogos entre a pesquisa e a prática educativa" e mais uma vez privilegiou o objetivo de discutir sobre os reflexos da pesquisa em Educação Matemática no cotidiano das salas de aula. O evento foi organizado em seis modalidades de trabalhos: palestra, mesa redonda, minicurso, comunicação científica, relato de experiência e pôster, além de duas Conferências. Neste encontro foram aconteceram 17 mesas redondas, 15 palestras, 280 comunicações científicas, 136 minicursos, 147 pôsteres e 120 relatos de experiências, que juntas contribuíram para a riqueza de informações acerca de pesquisas em educação matemáticas advindas das cinco regiões do Brasil.

O X ENEM foi realizado entre 7 e 9 de julho de 2010, em Salvador/BA, com o tema “Educação Matemática, Cultura e Diversidade” e foi organizado pela SBEM/BA e por docentes das instituições Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Universidade Católica do Salvador – UCSal, Universidade Federal da Bahia – UFBA e Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB. Os objetivos estavam relacionados à discussão de temas relevantes, tais como a influência e a importância da cultura no ensino da Matemática; o respeito à diversidade que cada dia invade a sala de aula e a escola; a integração das tecnologias e a proliferação dos cursos à distância; a formação de professores; a necessidade da pesquisa acadêmica chegar à escola; entre outros. O evento contou com 4.035 participantes de todas as regiões do Brasil.

Sobre os trabalhos ligados à história da matemática, publicados nos anais dos ENEM

Nesta seção apresentamos um panorama geral das produções publicadas nos anais dos ENEM, que tratam da história da Matemática, com o objetivo de destacar os estudos sobre História da Educação Matemática. Nesse sentido, a tabela 1 a seguir mostra o número de trabalhos publicados nos anais dos ENEM, relacionados à história da matemática em suas três tendências: história e epistemologia da matemática, a história da educação matemática e a história e pedagogia da matemática.

Tabela 1
Trabalhos que abordaram a história da Matemática nos ENEM (1987-2010)

Encontros realizados / anos	**Tendências dos estudos e pesquisas (Nº de trabalhos)**			**Total de trabalhos**
	A*	**B****	**C*****	
1º ENEM – 1987	0	1	2	3
2º ENEM – 1988	0	0	2	2
3º ENEM – 1990	0	0	1	1
4º ENEM – 1992	2	2	2	6
5º ENEM – 1995	4	0	1	5
6º ENEM – 1998	1	7	2	10
7º ENEM – 2001	0	6	1	7
8º ENEM – 2004	0	6	1	7
9º ENEM – 2007	1	4	2	7
10º ENEM – 2010	18	30	7	55
Total de inscritos	**26**	**56**	**21**	**103**

Fonte: Elaborado pelo autor, com base nas categorias propostas por Mendes (2008) e artigos dos ENEM (1987-2010).

* História e epistemologia da matemática.
** História da educação matemática.
*** História e pedagogia da matemática.

De acordo com a tabela 1, é possível verificar a quantidade de trabalhos que apresentavam pesquisas relacionadas com a história da Matemática e Educação Matemática. Ressaltamos que a organização dessas publicações se deu em decorrência da familiaridade dos autores em relação ao campo de pesquisa.

No I ENEM, 3 trabalhos estavam relacionados com a história, sendo 1 na história da educação matemática (tendência B) e 2 na história e pedagogia da matemática (tendência C). É importante mencionar que estavam disponíveis apenas os títulos dos trabalhos, a saber: Nova fase do boletim GEPEM, apresentado por Regina Monken; A história da matemática vista como contexto do ensino da matemática, apresentado por Ema Luiza B. Prado e José Geraldo A. Mendes da Silva; Inteiros: dificuldades históricas e uma proposta de ensino para ultrapassá-las, apresentado por Maria Terezinha Jesus Gaspar.

Os anais do II ENEM apresentavam apenas os resumos dos trabalhos, dificultando a análise, pelo fato de alguns resumos não apresentarem clareza na sua proposta. Consideramos duas comunicações como representantes da tendência C. A primeira comunicação titulada de "A matemática áurea de Gizé" foi inserida na história e pedagogia da matemática por afirmar que mostraria a evolução de um triângulo retângulo, com o qual foram construídas as duas Pirâmides de Gizé. Com esse aspecto, acredito que a proposta da comunicação era apresentar por meio da história no ensino da matemática, a construção do conceito de triângulo. Na segunda comunicação "Um pequeno histórico sobre sistemas de numeração", apresentava resquícios de história, na qual a autora levantou dados sobre a origem e desenvolvimento de Sistemas de Numeração.

Durante o III ENEM foi verificado apenas uma comunicação titulada de "O uso da história e o desenvolvimento do senso crítico nas aulas de matemática: alguns desvios", que fazia uso da história da matemática. O pequeno texto se inseriu na história e pedagogia da matemática por

apresentar algumas informações sobre a matemática ao final da década de 70, com discussões acerca da sequência de ensino (lógica e histórica), com críticas em relação ao modo como se trabalhava a história no ensino da matemática. Neste sentido, a crítica apresentada na comunicação pode ser complementada com as informações sobre o uso da História como impulsionadora do interesse do aluno para estudar Matemática com ligação ao Uso Episódico defendido por Fossa (2001, p.55) quando aborda que "tem uma tendência de ser menos intensivo, frequentemente limitando o papel da História a uma parte introdutória motivadora". É interessante esclarecer que esse uso nas aulas de Matemática não pode se confunde com o uso ornamental, uma vez que as informações históricas se apresentam, algumas vezes, desligada do tema que está sendo abordado em sala de aula, e é feito de forma esporádica.

Os anais de IV ENEM identificamos 6 trabalhos que focalizavam a história e epistemologia da matemática (2), história da educação matemática (2) e história e pedagogia da matemática (2). Em relação à primeira tendência (A), destacamos a comunicação "Princípio de Cavalieri", que fez uma pequena incursão pela história da Matemática, com o uso das principais linhas de pensamento para calcular volumes de sólidos. O texto apresenta o Princípio de Cavalieri e a comparação entre as ideias de Arquimedes para o cálculo de volumes. Na mesma tendência, a comunicação "História da trigonometria na Grécia", apresentou a história, associada aos métodos indiretos de mensuração comuns à agrimensura, astronomia e geodesia. Neste espaço, os autores apresentaram os métodos e procedimentos para obtenção das fórmulas para a corda da metade de um arco, entre outros, de modo a elaborar tabelas de cordas da antiguidade.

As comunicações "história de vida e cotidiano do professor de matemática" e "Memória e análise da pesquisa acadêmica em Educação Matemática no Brasil: o banco de testes da Faculdade de Educação – UNICAMP" utilizaram a história e memória da educação para descrever os fatos históricos de um determinado período. Os estudos apresentaram a consolidação da Educação Matemática como área de conhecimento. O autor da segunda comunicação analisou os aspectos gerais das produções da UNICAMP, por meio dos documentos disponíveis no Programa de Pós-Graduação (dissertações e teses defendidas). O mesmo desenvolveu um catálogo com do banco de teses da Faculdade de Educação da UNICAMP e distribuiu durante a apresentação da comunicação. Desse modo, inseri esses trabalhos na segunda tendência (B). Em relação à história no ensino da matemática, dois trabalhos apresentaram características do uso da história para ensinar conteúdos matemáticos. Os trabalhos "História da Matemática x Ensino da Matemática" e o "O ensino de cálculo infinitesimal espelhado na história da Matemática" descrevem uma proposta do uso da História nas aulas de matemática, com sequência histórica de certo conteúdo, ao invés, de considerar apenas a sequência do encadeamento lógico do conteúdo. No segundo trabalho, o autor propõe ensinar os conceitos de derivadas e integrais sem o prévio formalismo de limites.

Os anais do V ENEM foi verificado 5 resumos que apresentaram aspectos de abordagem histórica. No primeiro resumo titulado "Equação do primeiro grau - uma abordagem histórica" de Celso de Oliveira Faria e Izídia Gonçalves Piau Rodrigues, relataram o envolvimento deles no ensino das equações do 1º grau, com alunos da 6ª série e suas dificuldades na resolução de problemas envolvendo as equações. Em seguida, mencionaram que construíram o conhecimento sobre tal conteúdo, por meio da inserção da história do desenvolvimento da álgebra. Com este aspecto, considero que a comunicação pode ser inserida na história e epistemologia da matemática, de forma que os autores utilizaram a história e epistemologia do conteúdo para desenvolver o ensino e a aprendizagem da matemática em sala de aula.

O segundo resumo titulado "Números-abordagem: histórica, epistemológica, prática", de Ivete Fernandes Alves Bernardo, Luz Catalina Riveros Rivera, Maria Carolina Bonna Bosquetti, Sílvia Rugani Ribeiro de Castro Matheus e Sílvio Gomes Bispo, retratou o tema "números", no qual discutiram como se deu o desenvolvimento dos sistemas de numeração ao longo da história, passando pelas civilizações Egípcia, Babilônica, Romana e Hindu, com intuito de descrever o Sistema de Numeração Decimal e em seguida, por meio da epistemologia, construíram o conceito de número. Desse modo, o resumo foi classificado na história e epistemologia da matemática, por apresentar a evolução histórica do conceito de sistema de numeração, apoiado na epistemologia do conceito de número.

O terceiro resumo "Conjuntos infinitos", de José Carlos Pinto Leivas, apresentou a história e evolução do conceito de infinito, de modo que chegasse à cardinalidade de conjuntos. Com isso, o autor desenvolveu o conceito dos conjuntos numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos) por meio da história da matemática. Assim, como os dois resumos anteriores, esse pode ser classificado como história e epistemologia da matemática.

O quarto resumo "Probabilidade – história e aplicações", de Mercedes Puga Las Casas, tinha por objetivo apresentar um pouco da história da probabilidade. Considero a comunicação situada na história no ensino da matemática, porque a autora propõe a utilização da história para desenvolver a compreensão de conceitos probabilísticos. É necessário salientar que o resumo não estava claro o suficiente para tirar todas as informações necessárias para o entendimento da classificação feita neste artigo.

O quinto resumo "História da Matemática: um caminho para recuperar o prazer da aprendizagem", de Catarina Maria Vitti, tinha por objetivo discutir as causas para o fracasso do ensino da Matemática. Neste sentido, a autora caracteriza as concepções tanto dos alunos quanto dos professores em relação ao que eles consideram dificuldades de aprendizagem em matemática. Para tanto, apresenta a investigação na história da matemática no estudo de geometria. Assim, aborda a alternativa de ensinar os conceitos em matemática utilizando a história. Neste contexto, a comunicação se inseriu na história e pedagogia da matemática, por apresentar uma abordagem relacionada ao uso da história para ensinar os conceitos de matemática.

Em relação ao VI ENEM constatou-se que havia 10 comunicações que abordavam a história da matemática, na qual 1 retratavam a história e epistemologia da matemática, 7 apresentaram a história da educação matemática e 2 explicavam o uso da história e pedagogia da matemática.

As comunicações retrataram por meio de estudos históricos, a contribuição do Movimento da Educação Matemática no Brasil, considerando a educação referente à matemática para além das fronteiras puramente conteudistas e de abordagens internalistas. Os autores apresentaram a Educação Matemática e sua relação ensino-aprendizagem na sua complexidade, ou seja, como um fenômeno que requer uma abordagem externalista. O Movimento visava à melhoria da qualidade do ensino da matemática por meio da modificação dos currículos de forma a aproximá-los da matemática contemporânea produzida pela comunidade científica internacional (ao final da década de 60). Segundo os autores, se deu pela tentativa de eliminar o ensino da matemática tradicional, baseado na memorização de regras e no treino de algoritmos, com ênfase aos aspectos lógicos e estruturais da matemática.

Neste contexto, o interesse dos artigos pautavam na reconstrução do passado por meio da análise de documentos históricos, livros-texto, cadernos de alunos, relatórios de governos, jornais e utilizando documentação escolar geral. Podemos identificar que havia uma preocupação com as questões relativas ao processo ensino-aprendizagem, e não meramente com os conteúdos matemáticos.

A organização dos anais do VII ENEM foi importante para a categorização, por apresentar textos completos. No Encontro, verificou-se que 7 comunicações/relato de experiência que abordavam a história da matemática, na qual 6 apresentaram a história da educação matemática e 1 explicava o uso da história e pedagogia da matemática. Neste evento, a análise histórica desempenhou papel importante ao revelar os elementos políticos presentes nos conteúdos de ensino matemático, bem como as Reformas no ensino secundário e seus desdobramentos, com destaque às sugestões de Euclides Roxo para o ensino de matemática. As ideias mais modernas e revolucionárias sobre o ensino de matemática do século XX foram apresentadas por Roxo.

A trajetória de vida do brasileiro Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido com o pseudônimo de Malba Tahan, também foi destaque no VII ENEM. Alguns artigos apresentaram e comentaram as obras do autor-personagem com destaque para "O homem que calculava" e "Didática da matemática". A segunda obra teve sua importância ao expressar ideias de um educador, com concepções que auxiliassem os professores na difícil tarefa de ensinar e iluminassem os caminhos do ensino da matemática, tornando-a agradável, divertida e curiosa. Além disso, revelaram a trajetória do educador e suas concepções sobre os valores no ensino de matemática, com questionamentos acerca do utilitário, educativo e cultural da matemática. Neste contexto, Malba Tahan afirmava que o professor deveria rever os aspectos que envolvem seu ensino e aprendizagem e refletir sobre as próprias inquietações acadêmicas. Portanto, o ensino de Matemática deixava de ser apenas o desenvolvimento do raciocínio, mas incluía, também, o desenvolvimento de outras faculdades intelectuais, ligadas à utilidade da Matemática.

Ao analisar os anais do VIII ENEM verificamos a existência de 7 comunicações científicas e/ou relatos de experiência abordavam a história da matemática, na qual 1 retratava a história e epistemologia da matemática e 6 apresentaram a história da educação matemática. De modo geral, os textos, por meio de documentos históricos apresentaram a configuração da educação, especialmente, no tocante ao ensino da matemática, com ênfase nos movimentos ocorridos no currículo da disciplina Matemática, como a conexão entre as diversas partes da matemática (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria), pode ser identificada na nova formulação do ensino secundário. Neste sentido, algumas pesquisas compreendem suas investigações na história das disciplinas, uma vez que, seus estudos remetem a disciplina de Matemática, observando o movimento da sua terminologia.

Ao verificar os anais do IX ENEM, identificamos 7 artigos que apresentaram a história da matemática, dos quais 2 mostravam o uso da história no ensino da matemática, 1 representava a história e epistemologia da matemática e 4 reportavam a história da educação matemática.

Os artigos recorreram aos documentos legais da educação e apresentaram como é sugerida a História da Matemática – um recurso para dar respostas a alguns "porquês", e também contribuir para um olhar mais crítico dos alunos sobre objetos de conhecimento. Assim, somam com as ideias de D'Ambrosio (1996), na qual afirma que as aulas de matemática podem ser vista como um fator de motivação para os estudantes, tornando-se um elemento motivador de grande importância. Essa motivação pode ser compreendida quando afirmam que o resgate da História

da Matemática é uma importante metodologia que oportuniza a constatação do conhecimento em matemática de antigas civilizações, bem como produzem novos conhecimentos.

Alguns trabalhos validaram suas informações, apoiados na história oral, numa perspectiva que atribui aos relatos de memória uma equivalência às memórias escritas. O acesso aos depoimentos orais, aos arquivos escolares e a muitos outros objetos que lançam luz ao passado da instituição. Como afirma Le Goff (2003), os arquivos das instituições, os museus e seus objetos do passado, os monumentos constituem o fermento à história. Além disso, conduziram suas informações aos pressupostos de que as práticas que são estabelecidas no quotidiano de uma instituição escolar levam em conta aspectos específicas do contexto ao qual ela está inserida, porque é no entorno das ações pedagógicas estabelecidas por uma determinada comunidade que se constrói a identidade do grupo, em conformidade com os propósitos e finalidades das disciplinas escolares presentes no currículo (CHERVEL, 1990).

Nos anais do X ENEM foi possível verificar 55 artigos que envolviam a história da matemática, dos quais 18 apresentavam História e Epistemologia da Matemática, 7 retratavam a História e Pedagogia da Matemática e 30 apoiaram suas pesquisas na História da Educação Matemática. Neste contexto, os artigos, de maneira geral, apresentaram a configuração do ensino da matemática nos diversos níveis de ensino. Em relação ao uso da história da matemática, as produções mostraram a relevância desse uso e essa alternativa tornou a educação mais significativa, baseando em teorias e estratégias de aprendizagem, que propuseram a construção do conhecimento por parte do educando em interação com a coletividade. Assim, o estudo da história da matemática permitiu compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e, também, observar os aspectos humanos do seu desenvolvimento.

Além disso, o potencial histórico e pedagógico da história da matemática na sala de aula pode ser observado em alguns artigos, que descreveram sobre a reflexão da utilização do desenvolvimento histórico, sua importância e aplicação como recurso pedagógico, e não apenas como elemento motivador. Neste espaço, a história da matemática serve como instrumento de formalização de conceitos matemáticos e conscientização epistemológica, bem como promove a aprendizagem significativa e compreensiva, com resgate da identidade cultural e revela a natureza da matemática. Esse aspecto corrobora com os documentos oficiais que regem o ensino da Matemática, nos quais afirmam que a utilização da história facilita o ensino da matemática.

Os trabalhos utilizaram a história de conceitos, de modo a obter subsídios para minimizar obstáculos de aprendizagem encontrados no ensino da Matemática. Assim, os aspectos históricos relacionados ao conteúdo constituíram num componente importante para a descrição dos processos de pensamento matemático e a consolidação da aprendizagem da disciplina. Destacaram ainda, a necessidade e importância de estudos de natureza epistemológica no processo de investigação e caracterização dos conteúdos matemáticos, sinalizando a história e epistemologia da matemática como o meio de inter-relação com o desenvolvimento da aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Resultados

A seguir, a tabela 2 apresenta a quantidade de artigos (relatos e comunicações científicas) que foram publicados nos anais dos ENEM em destaque aos que tratam da história da educação matemática como foco de suas pesquisas.

Tabela 2
Trabalhos publicados nos Anais dos ENEM (1987-2010): comunicações científicas e relatos de experiências

Encontros realizados	**Nº de trabalhos publicados**	**Nº de trabalhos sobre História da Educação Matemática**
1º ENEM	77	1
2º ENEM	92	0
3º ENEM	81	0
4º ENEM	61	2
5º ENEM	152	0
6º ENEM	282	7
7º ENEM	177	6
8º ENEM	236	6
9º ENEM	400	4
10º ENEM	865	30
Total de inscritos	**2 423**	**56**

Fonte: Elaborado pelo autor, com base nas categorias propostas por Mendes (2008) e artigos dos ENEM (1987-2010).

De acordo com a tabela 2, durante a realização do I ENEM foram contabilizados 77 trabalhos (comunicação ou relato de experiência), dos quais apenas 1 apresentava em seu título resquícios de história da educação matemática. O arquivo que comportava os anais disponíveis no site da SBEM, não apresentava o texto completo das sessões coordenadas, dificultando a caraterização e organização dos dados para está dissertação. Não é possível afirmar que esse trabalho corresponde integralmente à história da educação matemática, visto que o título não dar subsídios suficientes para determinar o conteúdo do texto. A suposição feita aqui perpassa o conhecimento sobre escritos posteriores do autor, bem como, a leitura de alguns textos que configuram numa aproximação desse título com outros trabalhos que remetem a história da educação matemática.

Na ocasião do II ENEM foram apresentadas 92 comunicações. Em relação ao ENEM anterior, houve uma modificação na estrutura dos anais, com a inserção de um textículo com indicação dos sujeitos, objetivos e conclusão da pesquisa. Essa modificação foi relevante para determinar e identificar os principais aspectos de cada pesquisa.

Em 1990, o III ENEM mostrou uma nova configuração em relação aos trabalhos apresentados nos anais do evento. Os textos ganharam mais volume e pode perceber com mais clareza os aspectos relacionados à área de cada pesquisa. Neste espaço, somam 81 comunicações orais que tratavam de diversos assuntos de Educação, Matemática e Educação Matemática. Entretanto, não houve representação de nenhum trabalho voltado à história da educação matemática.

O IV ENEM, realizado na cidade de Blumenau-SC, contou com a participação de 61 trabalhos apresentados na forma de comunicação científica, cujo foco de tais trabalhos se portava para o tema "Educação Matemática e Ciências, Tecnologia e Sociedade". Nos anais deste ENEM foi verificado 2 comunicações que retratavam sobre à história da educação matemática, um apresentava a história de uma instituição e o outro sobre história de uma disciplina.

Em 1995, o V ENEM representou a continuação da consolidação da área de Educação Matemática no País. Alicerçada numa metodologia que constituía na mudança dos padrões de ensino de matemática, os trabalhos contribuíram para o melhoramento das fragilidades dos conhecimentos matemáticos dos alunos da educação básica e superior. Os procedimentos mecânicos, descontextualizados, inconscientes que emergiam no contexto do ensino de matemática da época, foi posta em "cheque" nos trabalhos que compuseram os anais desse encontro. Assim, o V ENEM desmistificou a ideia de que a matemática pode ser compreendida pela simples transmissão do conhecimento matemático, expondo a errônea forma de concepção pedagógica que o professor carrega. Neste evento, contabilizou-se 152 trabalhos, dos quais nenhum envolvia a história da educação matemática.

Os anais do VI ENEM foi modificado e uma nova proposta foi incorporada aos trabalhos. No intuito de permitir melhor aproveitamento das comunicações orais (relatos e comunicações científicas) decidiu-se que as sessões teriam comentadores. As comunicações foram separadas em 18 temas, dos quais retratavam estudos direcionados para os diversos níveis de ensino. Na ocasião, as comunicações concentraram-se no estudo das condições para aquisição do conhecimento, direcionando o professor como facilitador da aprendizagem e um companheiro na busca do novo. Nesse processo, o professor deve dar condições para que os alunos cheguem ao seu próprio conceito e saiba justificá-lo, usando a observação, o raciocínio e a criatividade. Neste contexto, contabilizamos 282 comunicações, das quais 7 focavam seus estudos na história da educação matemática, a saber: história das instituições (3), história das disciplinas (1), história e memória (2) e história oral (1).

No VII ENEM os artigos abordaram diversos pontos que permeavam os processos de ensino e aprendizagem em matemática. Neste contexto, uma exigência para alcançar um elevado nível de qualidade na educação era aprimorar o conhecimento sobre o processo educacional, de forma a torná-lo mais eficaz. Assim, as 133 comunicações científicas e os 64 relatos de experiências versavam sobre esse processo, com estudos que tentavam elucidar a importância da matemática, bem como, na defesa de um ensino que propiciasse ao aluno situações de investigação, exploração e descoberta. Durante a realização deste ENEM, 7 trabalhos (comunicação científica e relato de experiência) enveredaram pela história da matemática, na qual 1 apresentou a história voltada para o ensino da matemática e 6 para a história da educação matemática. Esses últimos apresentaram o processo de geração de conhecimento por meio de história de vida e formação – biografia (2), história das disciplinas (2), história das instituições (1), história e memória (1).

O VIII ENEM contou com 166 comunicações científicas e 70 relatos de experiência que foram distribuídos em 12 grupos de trabalho (GT). O Encontro, completando 20 anos de seu início, ganhou repercussão nacional e internacionalmente, ao propiciar condições para aquisição de fundamentos teóricos e práticos, o ENEM favorece para um bom desempenho da docência em matemática. Nesse encontro, concentramos a atenção nos trabalhos que se encontravam no GT 5 – História da Matemática e Cultura, que possuía 18 trabalhos (16 comunicações e 2 relatos), dos quais 6 relacionavam com a história da educação matemática. Os autores utilizaram nas pesquisas as seguintes abordagens: história das disciplinas (2), história das instituições (1), abordagem mista (1) e biografia (2).

O IX ENEM contou com 280 comunicações científicas e 120 relatos de experiências, dos quais 4 apresentavam a história da educação matemática. Dessas, 1 abordava a abordagem

história biográfica, 2 história das disciplinas e 1 abordagem mista (história oral, história das instituições e história das disciplinas).

O X ENEM se empenhou em proporcionar conferências, comunicações científicas, minicursos, palestras, pôsteres e relatos de experiência que estivessem relacionados ao processo de geração de conhecimento matemático e o papel que a matemática assume em relação à construção consciente da cidadania. Com o tema "Educação Matemática, Cultura e Diversidade", apoiava-se nas discursões sobre à influência e a importância da cultura no ensino da Matemática; o respeito à diversidade na sala de aula; os desafios de se ensinar Matemática para alunos com necessidades especiais; a formação de professores, dentre outros. Assim, as ações afirmativas que se firmaram entre os profissionais de diferentes áreas do conhecimento foi à marca do X ENEM para a comunidade científica. Os trabalhos abordavam diversos assuntos e se direcionava para todos os níveis de ensino. Neste Encontro foram apresentadas 542 comunicações científicas e 323 relatos de experiência, organizadas em 22 temáticas. Com relação aos ENEM anteriores, houve um crescimento significativo na qualidade dos trabalhos, pelo modo como o pesquisador posicionou-se diante de suas fontes, revelando a peculiaridade de seu foco de análise, bem como a objetividade apresentada em cada pesquisa, algo que não era possível identificar anteriormente.

Conclusões

Por conseguinte, de modo geral, podemos imprimir alguns apontamentos sobre os artigos dos ENEM, que nos dão um panorama da consolidação da Educação Matemática no Brasil. Ressaltamos que utilizamos apenas os artigos que retratavam a história da matemática em suas pesquisas, de modo a elucidar os principais elementos que constituíram essa área de conhecimento. No percurso, caracterizamos cada encontro e sua importância no desenvolvimento de pesquisas para o ensino e a aprendizagem da disciplina Matemática. Consideramos relevante esse levantamento documental, por se tratar de um evento amplo, que interliga todas as regiões do Brasil. Apesar de termos observado apenas os artigos que envolviam a história da matemática, podemos confirmar que estes contribuem para a visualização geral do movimento da Educação Matemática, com contribuições significativas para ensinar matemática nos diversos segmentos da educação básica e do ensino superior. É visível a contribuição dos trabalhos dos ENEM para confirmarmos os avanços e retrocessos do ensino de matemática durante esses 23 anos. Esse panorama do passado recente constitui num passo importante para tentarmos esclarecer como essas pesquisas favorecem para a disseminação do conhecimento matemático.

Referências e Bibliografia

Anais do I Encontro Nacional de Educação Matemática. (1987). São Paulo/SP.

Anais do II Encontro Nacional de Educação Matemática. (1988). Maringá/PR.

Anais do III Encontro Nacional de Educação Matemática. (1990). Natal/RN.

Anais do IV Encontro Nacional de Educação Matemática. (1992). Blumenau/SC.

Anais do V Encontro Nacional de Educação Matemática. (1995). Aracaju/SE.

Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática. (1998). São Leopoldo/RS.

Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática. (2001). Rio de Janeiro/RJ.

Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. (2004). Recife /PE.

Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. (2007). Belo Horizonte/MG.

Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. (2010). Salvador/BA.

Amado, J. (2003). O Cervantes de Goiás. *Nossa História.* São Paulo: Vera Cruz, ano 1, v. 2, p. 28 – 33, dez.

Bittencourt, Circe Maria Fernandes. (2003). Disciplinas Escolares: história e pesquisa. In: Oliveira, Marcus Aurélio Taborda de & Ranzi, Serlei Maria Fischer. (org.) *História das Disciplinas Escolares no Brasil: contribuições para o debate*. Bragança Paulista: EDUSF.

Brasil. (2006). Ministério da educação e do desporto (MEC). *Organizações curriculares nacionais para o ensino médio*. Brasília: SEF.

Chervel, André. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Revista Teoria e Educação*, n. 2. Porto Alegre: UFRGS.

D'Ambrosio, Ubiratan. (1996) História da Matemática e Educação. *Cadernos CEDES – História e Educação Matemática*, São Paulo: Papirus, v.40, p.7-17.

Fossa, John A. (2001). *Ensaios sobre a Educação Matemática*. Belém: EDUEPA. 55p. (Série Educação; n.2)

Garnica, Antonio Vicente Marafioti. (2003). História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação. *Zetetiké*. Campinas: CEMPEM, v. 11, n.19, p. 09 – 55, jan/jun.

Le Goff, Jacques. (2003). *História e memória*. Campinas, SP: Ed. Unicamp.

Mendes, Iran Abreu. (2014) *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010.* Relatório de pesquisa. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Impresso.

Mendes, Iran Abreu. (2010) *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010.* Projeto de pesquisa. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Impresso.

Mendes, Iran Abreu. (2008) Uma radiografia dos textos publicados nos Anais dos SNHM. In: *Anais. 11º Seminário Nacional de História da Ciência e Tecnologia*. Niterói: SBHC. p. 1-11.

Sánchez Gamboa, S. A. *Pesquisa em educação: métodos e epistemologias.* Chapecó: Argos, 2007.

Vielle, J. P. *Impacto de la investigación em ele campo educacional*. Perspectivas, UNESCO. Paris, 1981.

Análise de livros didáticos de Matemática de escolas primárias a partir da análise de conteúdo de Bardin

Malcus Cassiano **Kuhn**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense-Câmpus Lajeado
Brasil
malcuskuhn@ifsul.edu.br
Arno **Bayer**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
bayer@ulbra.br

Resumo

A presente comunicação apresenta um roteiro de análise de conteúdo que está sendo utilizado na tese de doutorado intitulada "o ensino de Matemática nas escolas evangélicas luteranas do Rio Grande do Sul na primeira metade do século XX". O referido roteiro foi criado para análise de livros didáticos de Matemática utilizados em escolas primárias brasileiras durante a primeira metade do século XX. Tendo como fundamentação teórica a análise de conteúdo de Bardin e o estudo do guia de livros didáticos (PNLD 2013 – Matemática), construiu-se um roteiro para análise de livros didáticos com unidades de análise e respectivas categorias. Com esse instrumento será possível uma análise mais aprofundada do conteúdo presente em livros didáticos de Matemática utilizados em outras épocas, permitindo estabelecer relações com os livros didáticos de Matemática atuais.

Palavras chave: Análise de conteúdo. Guia de livros didáticos. Análise de livros didáticos de matemática. Unidades de análise. Categorias.

Introdução

Nesta comunicação se apresenta o roteiro utilizado para análise de livros didáticos de Matemática, utilizados em escolas brasileiras, na primeira metade do século XX. Esse roteiro está sendo usado na tese de doutorado intitulada "o ensino de Matemática nas escolas evangélicas luteranas do Rio Grande do Sul na primeira metade do século XX", para analisar o conteúdo dos livros didáticos de Matemática desse período.

Para construção deste instrumento, incialmente fez-se um estudo teórico da análise de conteúdo de Bardin, a qual fundamenta esta investigação. Em seguida, fez-se o estudo do "Guia de livros didáticos: PNLD 2013 – Matemática", usado pelo Ministério da Educação do Brasil para selecionar os livros didáticos de Matemática que são utilizados nos anos inicias do Ensino Fundamental das escolas públicas brasileiras no triênio 2014-2016.

A partir da análise de conteúdo de Bardin e do Guia de livros didáticos, construiu-se um roteiro, com unidades de análise e categorías, para análise mais aprofundada do conteúdo presente em livros didáticos de Matemática de um determinado período histórico da educação brasileira.

Fundamentação teórica

O referencial teórico-metodológico usado nesta investigação envolve a análise de conteúdo de Laurence Bardin, professora-assistente de psicologia na Universidade de Paris V. A mesma aplicou as técnicas da análise de conteúdo na investigação psicossociológica e no estudo das comunicações de massas.

A análise de conteúdo teve seu berço nos Estados Unidos, onde foi aplicada como um instrumento de análise das comunicações, há mais de meio século. Segundo Bardin (2011):

> Descrever a história da "análise de conteúdo" é essencialmente referenciar as diligências que nos Estados Unidos marcaram o desenvolvimento de um instrumento de análise de comunicações; é seguir passo a passo o crescimento quantitativo e a diversificação qualitativa dos estudos empíricos apoiados na utilização de uma das técnicas classificadas sob a designação genérica de análise de conteúdo; é observar a *posteriori* os aperfeiçoamentos materiais e as aplicações abusivas de uma prática que funciona há mais de meio século. Mas também é por em questão as suas condições de aparecimento e de extensão em diversos setores das ciências humanas, e tentar clarificar as relações que a análise de conteúdo mantém ou não com disciplinas vizinhas pelo seu objeto ou pelos seus métodos (Bardin, 2011, p.19).

Historicamente, três fenômenos primordiais afetam a investigação e a prática da análise de conteúdo. "O primeiro é o recuso, o computador; o segundo, o interesse pelos estudos inerentes à comunicação não verbal e o terceiro é a inviabilidade de precisão dos trabalhos linguísticos" (Bardin, 2011, p. 28). Os programas de computadores permitiram uma análise mais detalhada dos textos, no que diz respeito à sua mensuração, ou seja, à frequência de uma determinada unidade de análise, permitindo a aplicação de técnicas estatísticas. A semiologia, começou, também, a explorar o campo de sistema de signos não linguísticos, campo até então inexplorado: a imagem, a tipografia e a música surgiram como possibilidades de serem trabalhadas através da abordagem da análise de conteúdo. Da mesma forma, os fundamentos teóricos desses novos campos (estruturalismo, psicanálise, por exemplo) começaram a questionar o movimento relativamente linear da análise de conteúdo. Já com a linguística, surge um questionamento, visto que a análise de conteúdo é confrontada com uma disciplina solidamente constituída e metodologicamente confirmada, mas com finalidade diferente.

A proliferação dos computadores pessoais e as experiências em inteligência artificial aumentaram a esperança em possibilidades informáticas. De acordo com Bardin, nas tendências atuais:

> A análise de conteúdo, multiplica as aplicações, marca um pouco o passo, ao concentrar-se na transposição tecnológica, em matérias de inovação metodológica. Mas observa com interesse as tentativas que se fazem no campo alargado da análise de comunicações: lexicometria, enunciação linguística, análise de conversação, documentação e base de dados (Bardin, 2011, p. 31).

A análise de conteúdo, enquanto método, "aparece como um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens" (Bardin, 2011, p. 44). Uma investigação a partir da perspectiva da análise de conteúdo está sempre procurando um texto atrás de outro texto, um texto que não está aparente já na primeira leitura e que precisa de uma metodologia para ser desvendado. De acordo com Bardin (2011):

> Mensagens obscuras que exigem uma interpretação, mensagens com um duplo sentido cuja significação profunda só pode surgir depois de uma observação cuidadosa ou de uma intuição carismática. Por detrás do discurso aparente, geralmente simbólico e polissêmico, esconde-se um sentido que convém desvendar (Bardin, 2011, p. 34).

Portanto, há na análise de conteúdo dois polos: a rigorosidade e a necessidade de ir além das aparências. Metodologicamente, existem duas orientações que ao mesmo tempo em que se confrontam também se complementam: a verificação prudente ou a interpretação brilhante.

Para Bardin (2011) a análise de conteúdo possui duas funções, que na prática podem ou não dissociar-se:

> Uma função heurística: a análise de conteúdo enriquece a tentativa exploratória, aumenta a propensão para a descoberta. É a análise de conteúdo para 'ver o que dá'. Uma função de "administração da prova": hipóteses sob a forma de questões ou de afirmações provisórias servindo de diretrizes, apelarão para o método de análise sistemática para serem verificadas no sentido de uma confirmação ou de uma informação. É a análise de conteúdo para "servir de prova" (Bardin, 2011, p. 35-36).

Na prática essas duas funções de análise de conteúdo se complementam. Bardin (2011) afirma que:

> A análise de conteúdo é um método muito empírico, dependente do tipo de "fala" a que se dedica e do tipo de interpretação que se pretende como objetivo. Não existe o pronto-a-vestir em análise de conteúdo, mas somente algumas regras de base, por vezes, dificilmente transponíveis. A técnica de análise de conteúdo adequada ao domínio e ao objetivo pretendidos, tem que ser reinventada a cada momento, exceto para usos simples e generalizados, como é o caso do escrutínio próximo da decodificação e de respostas a perguntas abertas de questionários cujo conteúdo é avaliado rapidamente por temas (Bardin, 2011, p. 36).

Na figura a seguir, Bardin apresenta possíveis domínios da aplicação da análise de conteúdo, segundo dois critérios: a quantidade de pessoas implicadas na comunicação e a natureza do código e do suporte da mensagem.

	Quantidade de pessoas implicadas na comunicação			
Código e suporte	*Uma pessoa "monólogo"*	*Comunicação dual "diálogo"*	*Grupo restrito*	*Comunicação de massa*
LINGUÍSTICO				
Escrito	Agendas, maus pensamentos, congeminações, diários íntimos.	Cartas, respostas a questionários, a testes projetivos, trabalhos escolares.	Ordens de serviço numa empresa, todas as comunicações escritas trocadas dentro de um grupo.	Jornais, livros, anúncios publicitários, cartazes, literatura, textos jurídicos, panfletos.
Oral	Delírio do doente mental, sonhos.	Entrevistas e conversas de qualquer espécie.	Discussões, entrevistas, conversas de grupo de qualquer natureza.	Exposições, discursos, rádio, televisão, cinema, publicidade, discos.
ICÔNICO (sinais, grafismo, imagens, fotografias, filmes etc.).	Garatujas mais ou menos automáticas, grafites, sonhos.	Respostas aos testes projetivos, comunicação entre duas pessoas por meio da imagem.	Toda a comunicação icônica num pequeno grupo (p. ex.: símbolos icônicos numa sociedade secreta, numa casta...).	Sinais de trânsito, cinema, publicidade, pintura, cartazes, televisão.
OUTROS CÓDIGOS SEMIÓTICOS (i.e, tudo o que não é linguístico e pode ser portador de significações; ex.: música, código olfativo, objetos diversos, comportamentos, espaço, tempo, sinais patológicos etc.).	Manifestações histéricas da doença mental, posturas, gestos, tiques, dança, coleções de objetos.	Comunicação não verbal com destino a outrem (posturas, gestos, distância espacial, sinais olfativos, manifestações emocionais, objetos cotidianos, vestuário, alojamento...), comportamentos diversos, tais como rituais e regras de cortesia.		Meio físico e simbólico: sinalização urbana, monumentos, arte...; mitos, estereótipos, instituições, elementos de cultura.

Figura 1. Domínios possíveis da aplicação da análise de conteúdo (Bardin, 2011, p. 40).

Assim, Bardin (2011) define a análise de conteúdo como:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (Bardin, 2011, p. 48).

A partir desta definição surgiram discussões sobre as diferenças que existiriam na análise de conteúdo se fosse enfatizada a abordagem qualitativa ou quantitativa nas pesquisas. De acordo com Bardin (2011):

> Na análise quantitativa, o que serve de informação é a frequência com que surgem certas características do conteúdo. Na análise qualitativa é a presença ou a ausência de uma dada característica de conteúdo ou de um conjunto de características num determinado fragmento de mensagem que é tomado em consideração (Bardin, 2011, p. 26-27).

De acordo com Bardin (2011), a intenção da análise de conteúdo é:

> A inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não). Se a descrição (a enumeração das características do texto, resumida após tratamento) é a primeira etapa necessária e se a interpretação (a significação concedida a estas características) é a última fase, a inferência é o procedimento intermediário que vem permitir a passagem, explícita e controlada, de uma à outra (Bardin, 2011, p. 44-45).

Ainda segundo a autora, "há duas práticas científicas intimamente ligadas à análise de conteúdo, quer pela identidade do objeto, quer pela proximidade metodológica: a linguística e as técnicas documentais" (Bardin, 2011, p. 49).

Bardin distingue a linguística e a análise de conteúdo da seguinte maneira:

> A linguística estuda a língua para descrever o seu funcionamento. A análise de conteúdo procura conhecer aquilo que está por trás das palavras sobre as quais se debruça. A linguística é um estudo da língua, a análise de conteúdo é uma busca de outras realidades por meio das mensagens (Bardin, 2011, p. 50).

Da mesma forma, a autora aponta diferenças essenciais entre a análise documental e a análise de conteúdo:

> A análise documental trabalha com documentos; a análise de conteúdo com mensagens (comunicação). A análise documental faz-se, principalmente, por classificação-indexação; a análise categórica temática é, entre outras, uma das técnicas da análise de conteúdo. O objetivo da análise documental é a representação condensada da informação, para consulta e armazenamento; o da análise de conteúdo é a manipulação de mensagens (conteúdo e expressão desse conteúdo) para evidenciar os indicadores que permitem inferir sobre uma outra realidade que não a da mensagem (Bardin, 2011, p. 52).

O método da análise de conteúdo, segundo Bardin (2011) consiste em tratar a informação a partir de três polos cronológicos, iniciando com a pré-análise, na qual se escolhem os documentos, se formulam hipóteses e objetivos para a pesquisa e se elaboram indicadores que fundamentem a interpretação final; depois a exploração do material, na qual se aplicam as técnicas específicas segundo os objetivos e por fim no tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Cada fase segue regras bastante específicas, podendo ser utilizado tanto em pesquisas quantitativas quanto em pesquisas qualitativas. A figura a seguir, traz um resumo esquemático das fases da análise de conteúdo:

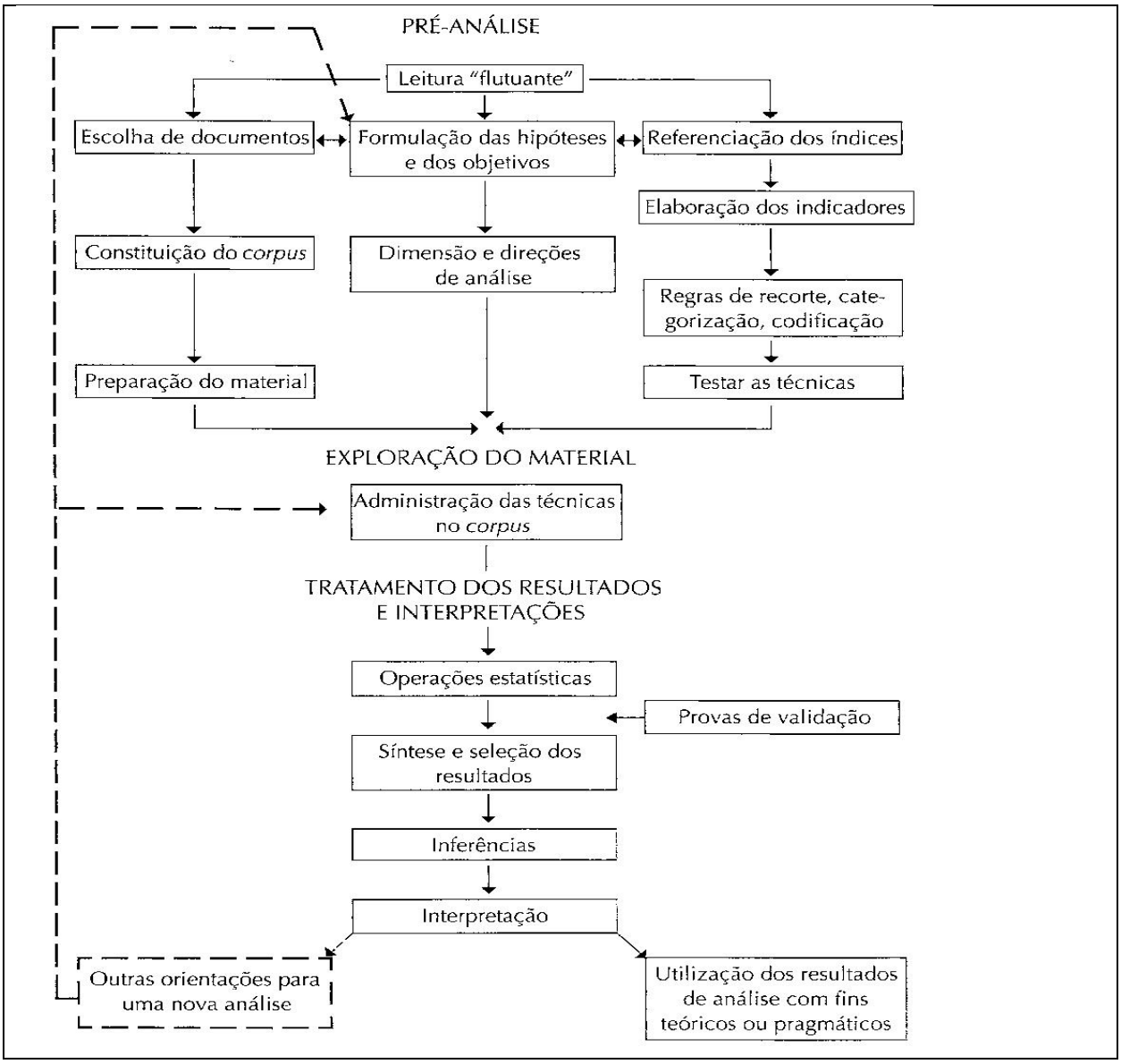


Figura 2. Resumo esquemático do desenvolvimento de uma análise de conteúdo (Bardin, 2011, p. 132).

De acordo com Bardin (2011) o primeiro contato com os documentos se constitui na chamada "leitura flutuante". É a leitura em que surgem hipóteses ou questões norteadoras, em função de teorias conhecidas. Através da leitura flutuante, surgem as primeiras hipóteses e objetivos do trabalho. A hipótese seria uma explicação antecipada do fenômeno observado, uma afirmação provisória, que nos propomos verificar. O objetivo geral da pesquisa é sua finalidade maior e está de acordo com o quadro teórico que embasa o conhecimento. Nem sempre as hipóteses são estabelecidas na pré-análise, afirma Bardin (2011). Elas podem surgir, assim como as questões norteadoras, no decorrer da pesquisa.

Após a leitura flutuante dos documentos e constituição de um *corpus*, ou seja, "o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (Bardin, 2011, p. 126), deve-se escolher índices, que surgirão das questões norteadoras ou das hipóteses, e organizá-los em indicadores precisos e seguros. "Desde a pré-análise devem ser determinadas operações de recorte do texto em unidades comparáveis de categorização para análise temática e

de modalidade de codificação para o registro dos dados" (Bardin, 2011, p. 130). Assim, os temas que se repetem com muita frequência podem ser os índices.

A preparação do material se faz pela "edição" das entrevistas transcritas, dos artigos recortados, das questões anotadas em fichas. A organização do material se realiza em colunas, com vazios à esquerda e à direita, para anotar e marcar semelhanças e contrastes. Naturalmente, estes procedimentos dependem dos interesses do pesquisador e dos objetivos que o levam a realizar a pesquisa.

A fase exploração do material "consiste nas operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas" (Bardin, 2011, p. 131).

Já a fase de tratamento dos resultados obtidos e a interpretação, ligam os resultados obtidos ao escopo teórico, e permite avançar para conclusões que levem ao avanço da pesquisa. "Os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (falantes) e válidos" (Bardin, 2011, p. 131).

Para Bardin, tratar o material é codificá-lo, ou seja:

> A codificação corresponde a uma transformação – efetuada segundo regras precisas – dos dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão; suscetível de esclarecer o analista acerca das características do texto, que podem servir de índices (Bardin, 2011, p. 133).

De acordo com Bardin (2011), a organização da codificação compreende três escolhas (no caso de análise quantitativa e categorial):

- O recorte: escolha das unidades;
- A enumeração: escolha das regras de contagem;
- A classificação e a agregação: escolha das categorias.

A divisão das componentes das mensagens analisadas em rubricas ou categorias não é uma etapa obrigatória de toda e qualquer análise de conteúdo. No entanto, segundo Bardin, a maioria dos procedimentos de análise organizam-se em redor de um processo de categorização:

> A categorização é uma operação de classificação de elementos constituintes de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos. O critério de categorização pode ser semântico (categorias temáticas), sintático (os verbos, os adjetivos), léxico (classificação das palavras segundo o seu sentido, com emparelhamento dos sinônimos e dos sentidos próximos) e expressivo (Bardin, 2011, p. 147).

Ainda de acordo com Bardin (2011), a categorização é um processo de tipo estruturalista e comporta duas etapas:

- o inventário: isolar os elementos;
- a classificação: repartir os elementos e procurar ou impor certa organização às mensagens.

Mas Bardin (2011) adverte que existem boas e más categorias. Defende que um conjunto de categorias boas deve possuir as seguintes qualidades: a exclusão mútua, a homogeneidade, a pertinência, a objetividade, a fidelidade e a produtividade. Bardin apresenta uma metodologia

para análise de conteúdo pormenorizada, inclusive com índices quantitativos, o que não foi objetivo desta investigação, uma vez que ela tem cunho qualitativo.

Portanto, a análise de conteúdo fornece informações suplementares ao leitor crítico de uma mensagem. De acordo com Bardin:

> O emissor ou produtor da mensagem pode ser um indivíduo ou um grupo de indivíduos e a mensagem transmitida exprime e representa o emissor. Já o receptor, pode ser um indivíduo, um grupo de indivíduos. Como a mensagem se dirige a este(s) indivíduo(s) com a finalidade de agir ou de se adaptar a ele(s), o estudo da mensagem poderá fornecer informações relativas ao receptor ou ao público. Assim, qualquer análise de conteúdo passa pela análise da mensagem. Esta constitui o material, o ponto de partida e o indicador sem o qual a análise não seria possível (Bardin, 2011, p. 165-166).

Dessa forma, Bardin (2011) traz aos pesquisadores um caminho multifacetado que caracteriza a análise de conteúdo como um método que, historicamente e cotidianamente, produz sentidos e significados na diversidade de amostragem presentes no mundo acadêmico e em especial nesta investigação, em que as categorias não foram definidas *a priori*, mas construídas durante o processo de investigação.

Método e resultados

Para construção do roteiro de análise de conteúdo, ainda se fez o estudo do Guia de livros didáticos: PNLD 2013 – Matemática, usado pelo Ministério da Educação do Brasil para selecionar os livros didáticos de Matemática que são utilizados nos anos inicias do Ensino Fundamental das escolas públicas brasileiras no triênio 2014-2016. Este guía traz uma ficha de avaliação com destaque aos seguintes tópicos: respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao ensino fundamental; observância de principios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano; coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela coleção, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados; correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos; observancia das características e finalidades específicas do Manual do Professor e adequação da coleção à linha pedagógica nele apresentada; adequação da estrutura editoial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da coleção (Brasil, 2012). Estes tópicos ainda estão divididos em itens para uma análise mais aprofundada dos livros didáticos.

Baseando-se no referencial teórico-metodológico (análise de conteúdo de Bardin) e no estudo do guía de livros didáticos, com o propósito de visualizar e analisar o conteúdo dos livros didáticos de Matemática utilizados em escolas primárias brasileiras durante a primeira metade do século XX, criou-se modalidades de recorte por meio de unidades de análise e se definiram as categorias a elas associadas, conforme segue:

Quadro 1
Unidades de análise e respectivas categorías

Unidades de análise	**Categorias**
Conteúdos	Números naturais e operações.
	Números fracionários e operações.
	Números decimais e operações.
	Geometria.
	Grandezas e medidas.
	Matemática comercial e financeira.

Aspectos pedagógicos	O livro introduz os conteúdos por explanação teórica seguida de exemplos e atividades de aplicação.
	O livro introduz o conteúdo apresentando um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e, depois, de atividades de aplicação.
	O livro inicia por atividades propostas, seguidas da sistematização, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias.
	Há equilíbrio e articulação entre conceitos, algoritmos e procedimentos.
	O conhecimento matemático está contextualizado com outras áreas da própria Matemática.
	O conhecimento matemático está contextualizado com outras áreas do conhecimento.
	O conhecimento matemático está contextualizado com práticas sociais e o cotidiano.
Processo de ensino e aprendizagem	O livro estimula a retomada de conhecimentos prévios.
	O livro incentiva o uso de conhecimentos extraescolares.
	O livro estimula competências matemáticas mais elaboradas, além da repetição e da memorização.
	O livro estimula o cálculo mental.
	O livro estimula o cálculo por estimativas.
	O livro incentiva à interação aluno-professor e aluno-aluno.
Recursos didáticos	O livro incentiva a utilização de materiais concretos.
	O livro estimula a resolução de problemas.
	O livro faz utilização de jogos.
	O livro apresenta desafios ou curiosidades matemáticas.
	O livro estimula leituras complementares.
Linguagem e aspectos gráfico-editoriais	A linguagem utilizada é adequada na apresentação dos conteúdos e na formulação das instruções.
	Os conteúdos são apresentados sem erro de informações básicas e sem erro conceitual.
	As diferentes representações matemáticas estão articuladas.
	As ilustrações favorecem a compreensão do conteúdo matemático.

Como se observa no quadro acima, foram criadas cinco unidades de análise com suas respectivas categorías: conteúdos (seis categorías); aspectos pedagógicos (sete categorías); processo de ensino e aprendizagem (seis categorías); recursos didáticos (cinco categorías); linguagem e aspectos gráfico-editoriais (quatro categorías). Com estas cinco unidades de análise e vinte e oito categorías, está se realizando a análise da Matemática presente em livros didáticos utilizados nas escolas paroquiais da Igreja Evangélica Luterana do Brasil na primeira metade do século XX.

Para exemplificar, apresenta-se parte da análise do livro didático "Série Concórdia: Terceira Aritmética", editado pela Casa Publicadora Concórdia em 1949. O livro possui 143 páginas e não apresenta sumário. Suas principais unidades de estudo são: frações decimais e sistema métrico (p. 1 até 33); frações ordinárias (p. 33 até 69); regra de três (p. 69 até 80); porcentagem (p. 80 até 101); juros (p. 101 até 120); razão e proporção (p. 120 até 135); geometria prática (p. 135 até 143). Baseando-se no instrumento elaborado e descrito no quadro 1, descreve-se a análise categorial da unidade de análise "conteúdos":

Categoria - Números naturais e operações:

Dentro da unidade de estudo "frações ordinárias", o livro traz a divisibilidade dos números com caracteres de divisibilidade (divisibilidade por 2, divisibilidade por 5, divisibilidade por 4, divisibilidade por 25, divisibilidade por 9 e divisibilidade por 3), decomposição dos números em fatores primos e máximo divisor comum. No final da unidade de estudo "geometria prática", o livro apresenta o estudo da raiz quadrada.

Categoria - Números fracionários e operações:

A segunda unidade de estudo do livro são as frações ordinárias. Breve definição, leitura, tipo de frações (própria, imprópria e número misto) e redução de frações (redução de números inteiros ou mistos a frações impróprias e vice-versa). Amplificação de frações (ideia de frações equivalentes), simplificação das frações, adição e subtração das frações ordinárias com o mesmo denominador, adição e subtração das frações ordinárias com denominadores diferentes, multiplicação (o multiplicador é uma fração, o multiplicador é um número inteiro, multiplicação de fração por fração), divisão (o divisor é um número inteiro, o divisor é uma fração – dividir um inteiro por uma fração e dividir fração por fração), frações decimais e ordinárias (conversão de fração decimal em ordinária e vice-versa).

Categoria - Números decimais e operações:

A primeira unidade de estudo do livro, denominada "frações decimais e sistema métrico", dedica-se as frações decimais, apresentando-se sua representação e relações com o sistema de medidas, a leitura das frações decimais, a adição e a subtração de frações decimais, a multiplicação de frações decimais (fração decimal por número inteiro, número inteiro por fração decimal e fração por fração), divisão de frações decimais (fração decimal por número inteiro, número inteiro por uma fração, fração decimal por fração decimal).

Categoria – Geometria:

A última unidade de estudo deste livro, denomina-se "Geometria prática", com ênfase nas medidas de superfície (o quadrado, o retângulo, o trapézio, o triângulo e o círculo) e nas medidas dos corpos – volume (o cubo, o prisma e o tronco de cone).

Categoria - Grandezas e medidas:

Na primeira unidade de estudo, denominada "frações decimais e sistema métrico", estuda-se as medidas de comprimento, medidas de "peso", medidas de superfície, medidas de volume, medidas de capacidade, bem como, relações entre as medidas de comprimento, relações entre as medidas de capacidade, relações entre as medidas de peso, relações entre as medidas de superfície, relações entre as medidas de volume. Apresenta ainda o tópico "metrologia", propondo o estudo da relação entre as antigas medidas brasileiras e as medidas do sistema métrico (medidas de comprimento, medidas de capacidade, medidas de peso, medidas de superfície, medidas de volume, medidas de tempo).

Na terceira unidade de estudo, o livro traz a "regra de três simples direta", fazendo inicialmente, de forma oral, a dedução da unidade para a multiplicidade, a dedução da multiplicidade para a unidade e a dedução da multiplicidade para a multiplicidade. Depois propõe a regra de três simples direta por escrito com problemas sobre números inteiros, problemas sobre frações ordinárias e problemas sobre frações decimais. Finaliza com a regra de três simples inversa e regra de três composta.

Dentro da unidade de estudo "juros", o livro apresenta o tópico "cronologia", explorando unidades de medida de tempo. Mais para o final do livro, traz-se o estudo da "razão e proporção", com problemas de mistura e liga. Repartição proporcional e regra de companhia (capitais desiguais, tempos iguais; capitais iguais, tempos desiguais; capitais e tempo desiguais).

Categoria - Matemática comercial e financeira:

A quarta unidade principal de estudo é a "porcentagem", inicialmente com cálculos orais e depois por escrito sobre porcentagens, cálculo da taxa e cálculo do valor nominal. Porcentagem comercial (peso bruto, tara e peso líquido; lucros e perdas, compras e vendas; desconto).

A quinta unidade de estudo são os "juros". Breve definição de termos e cálculo do juro. Documentos de dívidas, notas promissórias e duplicatas. Cálculo da taxa (problemas de usura e doações). Cálculo do capital e cálculo do tempo. Logo após o estudo da regra de companhia, o livro propõe o estudo do câmbio (moedas dos países principais e paridade).

A análise categorial das demais unidades de análise ainda está em fase de elaboração, lembrando-se que serão analisados mais três livros didáticos de Matemática para escrita final da tese doutoral.

Considerações finais

Ao finalizar a presente comunicação científica é preciso ressaltar que o instrumento construído se fundamenta na análise de conteúdo de Bardin e no Guia de livros didáticos: PNLD 2013 – Matemática, usado pelo Ministério da Educação do Brasil para selecionar os livros didáticos de Matemática que são utilizados nos anos inicias do Ensino Fundamental das escolas públicas brasileiras no triênio 2014-2016.

O referido instrumento está sendo usado na análise de quatro livros didáticos de Matemática, publicados pela Casa Publicadora Concórdia de Porto Alegre/RS, na primeira metade do século XX, e utilizados em escolas primárias paroquiais da Igreja Evangélica Luterna do Brasil - IELB.

Espera-se que as unidades de análise e respectivas categorías que compõem o instrumento, contribuam para uma visualização e análise mais aprofundada da Matemática presente nestes livros didáticos e praticada nas escolas no período acima referido, especialmente em comunidades rurais gaúchas de origem alemã.

Embora, o trabalho possa se tornar um pouco exaustivo em função da quantidade de categorías, entende-se que um estudo científico requer uma análise das "entrelinhas", neste caso, do ensino de Matemática praticado em escolas luteranas primárias, possibilitando o estabelecimento de relações com o ensino de Matemática praticado atualmente nos anos iniciais das escolas brasileiras.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo* (Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro). São Paulo: Edições 70.

Brasil. (2012). *Guia de livros didáticos: PNLD 2013 - Matemática.* Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Série Concórdia: Terceira Aritmética. (1949). Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia.

Análisis de contenido: el primer libro de texto de Matemáticas editado en Costa Rica

Miguel **Picado**
Universidad Nacional
Costa Rica
miguepicado@hotmail.com

Resumen

Esta comunicación presenta un análisis del primer libro de texto editado en Costa Rica. Pretende caracterizar los conceptos y procedimientos matemáticos, sus representaciones y los contextos utilizados para mostrar su uso. El estudio se realizó a partir de las categorías del Análisis de Contenido, componente del Análisis Didáctico (Rico, 2013). Se identifican conceptos y procedimientos aritméticos básicos que enfatizan el cálculo en situaciones matemáticas. Las particularidades identificadas permiten caracterizar el libro de texto como una herramienta para instruir en conceptos y, fundamentalmente, operaciones aritméticas básicas aplicadas a números enteros, quebrados y decimales.

Palabras clave: Análisis didáctico, Aritmética, Conceptos matemáticos, Enseñanza de las matemáticas en Costa Rica, Libro de texto.

Abstract

This paper presents an analysis of the first textbook edited in Costa Rica. The study aims to characterize mathematical concepts and procedures, their representations and the contexts used to show their usefulness. The study was conducted from the categories of Content Analysis, one of the components of Didactic Analysis (Rico, 2013). Concepts and procedures that emphasize basic arithmetic calculation in mathematical situations are identified. The identified features allow characterizing the textbook as a tool for instruction in concepts and, fundamentally, in basic arithmetic operations applied to integers, fractions, and decimals numbers.

Key words: Didactic analysis, Arithmetic, Mathematical concepts, Mathematics teaching in Costa Rica, Textbook.

Introducción

La Constitución española de 1812 llevó a un movimiento de democratización de la educación en Costa Rica, visible en la creación de un mayor número de instituciones educativas para la enseñanza primaria. La fundación de la Casa de Enseñanza de Santo Tomás en San José (1814), uno de los centros educativos emblemáticos de la Historia de la Educación costarricense, se convirtió en ejemplo del alcance de los dictámenes constitucionales de 1812 en Costa Rica. La enseñanza en esta institución estuvo orientada a las llamadas "primeras letras": lectura, escritura y conteo, junto a lecciones de filosofía, gramática castellana y gramática latina. Esta diversidad

de conocimientos y niveles educativos la caracterizan como una institución para la educación primaria y secundaria (Ruíz, 1994).

Administrativamente, la Casa de Enseñanza de Santo Tomás estuvo dirigida por el Bachiller Rafael Francisco Osejo quien también estuvo a cargo de la Cátedra de Filosofía y la instrucción en primeras letras en distintos periodos. Además de su labor educativa y su actuación en la política nacional, Rafael Osejo se distingue por ser el autor del primer libro de texto editado en Costa Rica, un texto de matemáticas: *Breves lecciones de aritmética para uso de los alumnos de la Casa de Enseñanza de Santo Tomás* (figura 1).

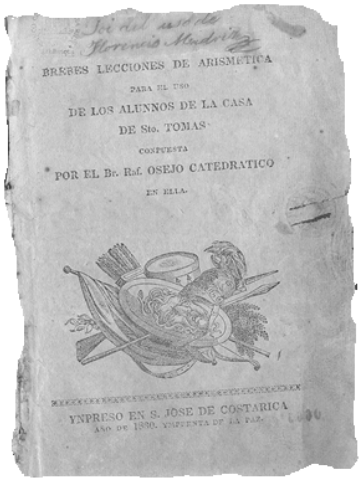

BREBES LECCIONES DE ARISMETICA
PARA EL USO
DE LOS ALUNNOS DE LA CASA
DE Sto. TOMAS
COMPUESTA
POR EL Br. Raf. OSEJO CATEDRATICO
EN ELLA.
YNPRESO EN S. JÓSE DE COSTARICA

Figura 1. Portada del libro "Breves lecciones de aritmética" (Osejo, 1830).

Esta contribución presenta los resultados de un estudio sobre el contenido matemático del primer libro de texto de matemáticas editado en Costa Rica. Pretende caracterizar los conceptos y procedimientos para la enseñanza de las matemáticas escolares, sus representaciones y los fenómenos que mostraron la utilidad y aplicabilidad de estos conceptos en el entorno de la época. El estudio se enmarca en la línea de investigación *Historia y Educación Matemática* desarrollada por el Grupo de Investigación Pensamiento Numérico del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

Antecedentes y marco teórico

El estudio de libros de texto de matemáticas, desde una perspectiva histórica, constituye una tendencia en las investigaciones actuales en Educación Matemática (Beyer, 2013; Karp y Schubring, 2014). Esto quizás, por la conciencia generada alrededor de la función formadora de los libros de texto y su función transmisora de determinados significados para la correcta comprensión de conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001).

Dentro de este marco, destacan estudios como Maz (2005) quien, mediante el análisis de textos históricos, indagó sobre los números negativos en España durante los siglos XVIII y XIX; Carrillo (2005) que presenta un análisis de textos sobre la enseñanza de la aritmética en las Escuelas Normales en España entre 1849 y 1868; y (Picado, 2012) que abordó el tema de libros de texto matemáticos en la implantación del SMD en España en la segunda mitad del siglo XIX. Contextualizados en una época más reciente, Ortiz (1998) estudió el significado de conceptos probabilísticos en libros de texto de bachillerato; y, Sierra, González y López (1999) analizaron el concepto de límite funcional en libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria en el período 1940-1995.

En otros contextos, se identifican los trabajos de Amaral, Ralha y Gomes (2011) y Zuin (2011) sobre la enseñanza de la medida en Portugal y la incorporación del SMD en este país, respectivamente. Pinto y González (2013) sobre la forma de abordar las ecuaciones lineales en libros de texto en Venezuela.

En Costa Rica, Zelaya (1973) presenta una caracterización de la obra de Osejo. Destaca el estilo "catecismo" del texto (Beyer, 2009), describe el contenido, el tipo de tareas y su propósito. Sin embargo, su exposición carece de un análisis de contenido que acentúe y explique aspectos de las matemáticas escolares en el texto desde una perspectiva didáctica.

Teóricamente, el estudio se enmarca en las investigaciones en Historia de la Educación Matemática (Fauvel y Gray, 1991; Fauvel y van Maanen, 2000, Van Dalen y Meyer, 1971; Belisario y González, 2012). Se construye a partir de tres focos teóricos. Primero, la matemática, para el estudio de determinados conceptos matemáticos en la escuela. Segundo, la didáctica, que fundamenta una aproximación curricular desde las disposiciones y la organización de las matemáticas escolares. Y, tercero, la historia, como el canal para enlazar matemáticas y currículo desde una perspectiva histórica (Aznar, 1997; Carrillo, 2005; Del Olmo, Rico y Sierra, 1996). La figura 2 muestra esta estructura.

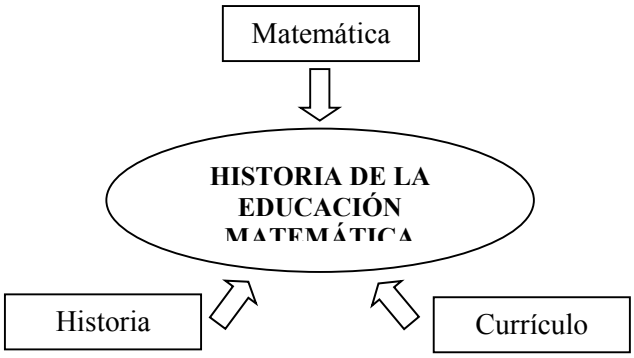


Figura 2. Focos teóricos del estudio.

Metodología

El estudio corresponde a una investigación cualitativa descriptiva en el campo de la investigación histórica en Educación Matemática. Se ha desarrollado a partir de cinco fases. Estas son: (a) planteamiento de la investigación; (b) búsqueda, localización y selección de las fuentes documentales y crítica histórica; (c) análisis de las fuentes seleccionadas; (d) interpretación de los datos; y, (e) comunicación de los resultados (Picado y Rico, 2011a).

La fase de selección se orientó con base en dos criterios específicos: (a) la fuente correspondería al primer libro de texto de matemáticas editado en Costa Rica y (b) la accesibilidad al documento original. La fuente original ha sido localizada y consultada en la Biblioteca Central de la Universidad Nacional de Costa Rica. Como parte del proceso de crítica histórica se ha comprobado su autenticidad y la exactitud de su contenido.

El análisis del libro de texto se ha realizado desde las categorías del Análisis Didáctico, técnica que ha estimulado y orientado una diversidad de investigaciones en Didáctica de la Matemática (Rico, 2013). Cuatro de sus componentes: el análisis conceptual, el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción, posibilitan el estudio de diversos aspectos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, en libros de texto. En este caso, se destaca el análisis de contenido como técnica para el estudio de la fuente (Picado y Rico, 2011b).

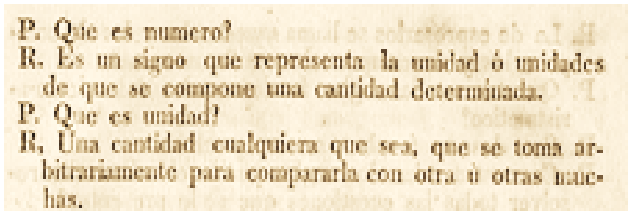
Desde esta perspectiva, este análisis proporciona categorías para identificar y caracterizar la estructura conceptual, las representaciones, los contextos y situaciones en que se mostraban conceptos matemáticos particulares. La categoría estructura conceptual resalta los conceptos matemáticos descritos en el libro de texto y las relaciones conceptuales entre estos. La categoría de representaciones identifica los modos de representar los conceptos matemáticos. Finalmente, la fenomenología muestra la diversidad de contextos y las situaciones en que se muestran los conceptos matemáticos.

Resultados

Los resultados del análisis se presentan a partir de las categorías consideradas para el estudio del libro de texto.

Estructura conceptual

Sobre los conceptos matemáticos y sus relaciones se han identificado algunas especificidades. Los conceptos de cantidad, número y unidad constituyen el primer bloque conceptual mostrado. Definidos individualmente, el autor mantiene un vínculo semántico entre estos. La cantidad es "todo lo que es susceptible de aumento ó de disminución, ó lo que puede ser mayor o menor [sic][1]" (p. 2) y que se expresa mediante números. La relación entre número, unidad y cantidad se muestra en la figura 3.


P. Que es numero?
R. Es un signo que representa la unidad ó unidades de que se compone una cantidad determinada.
P. Que es unidad?
R. Una cantidad cualquiera que sea, que se toma arbitrariamente para compararla con otra ú otras muchas.

P. Que es número?
R. Es un signo que representa la unidad ó unidades de que se compone una cantidad determinada.
P. Que es unidad?
R. Una cantidad cualquiera que sea, que se toma arbitrariamente para compararla con otra ú otras muchas [sic].

Figura 3. Relación entre los conceptos de cantidad, número y unidad.

El número constituye uno de los conceptos fundamentales en el libro de texto. Este es clasificado en tres tipos, (a) homogéneo o heterogéneo, (b) simple o compuesto, (c) entero, quebrado y fraccionario. Esta diferenciación pone de manifiesto la distinción del número desde su calidad (especie), expresión (guarismos) y unidad, respectivamente. Cualidad común en textos del siglo XIX. El número entero se muestra como la expresión de una unidad o unidades "enteras". El número quebrado representa partes de la unidad, y el fraccionario es una combinación entre "la unidad ó unidades, y algunas partes de la unidad [sic]" (p. 3). Estas concepciones ponen de manifiesto la influencia newtoniana y euleriana sobre el número en la época.

La expresión, composición y descomposición son los términos utilizados para introducir las operaciones de numeración y cálculo. "[Sobre las operaciones aritméticas con los números] la de espresarlos se llama *numeración* y las de componerlos y descomponerlos se llama *cálculo* [sic]" (p. 4).

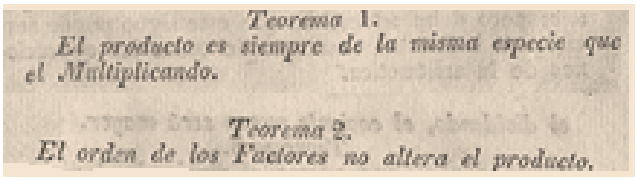
Sobresale en el texto la discriminación entre las reglas fundamentales del cálculo. Se consideran "reglas primarias" a las operaciones de sumar y restar. El autor destaca que posibilitan resolver "todas las cuestiones que se le presenten" (p. 4). Las llamadas "reglas secundarias" se derivan de las primarias. Estas son sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a

[1] Las citas textuales mantienen la grafía de la época presente en el texto.

potencias y extraer raíces. Al parecer, las reglas primarias se asocian a la definición de cantidad. Se vincula directamente la suma con el aumento y la resta con la disminución que sufre aquello que se conoce como cantidad. Sumar corresponde a "juntar muchas cantidades semejantes ú homogéneas, en una [sic]" (p. 4); restar es "averiguar quanto queda quitada de una cantidad, otra homogénea, igual o menor [sic]" (p. 5).

Aunado a la descripción de los términos que componen cada una de las operaciones —a excepción de la potencia y la raíz—, se definen la multiplicación y la división. Multiplicar es "tomar una cantidad tantas veces como unidades tiene otra" (p. 6). El producto ("lo que resulta de la multiplicación"), se clasifica en parcial y total. El primero se obtiene al multiplicar "el multiplicando" con "algunas de las veces que espresare las unidades del multiplicador [sic]"; el segundo cuando las partes consideradas corresponden a su totalidad. La división se asocia al número de veces que una cantidad "cabe" en otra. En palabras del autor, dividir es "averiguar quantas vezes contiene una cantidad a otra ó averiguar quantas vezes una cantidad cabe en otra [sic]" (p. 7).

La presentación de las operaciones de multiplicar y dividir se acompaña de "teoremas" sobre las características del producto y el cociente, respetivamente. Estos destacan el valor de estos números y la homogeneidad entre estos y la especie considerada en el multiplicando y el dividendo. La figura 4 muestra dos teoremas mostrados en el libro de texto.


Teorema 1.
El producto es siempre de la misma especie que el Multiplicando.
Teorema 2.
El orden de los Factores no altera el producto.

Teorema 1.
El producto es siempre de la misma especie que el Multiplicando.
Teorema 2.
El orden de los Factores no altera el producto [sic].

Figura 4. Teoremas sobre la operación de multiplicar.

Lo expuesto permite establecer conexiones entre los conceptos matemáticos abordados. La figura 5 presenta un esquema conceptual.

Es evidente el realce de la expresión numérica, como representación de la cantidad, exposición de un tipo de número y operación aritmética. También, destaca el vínculo entre las llamadas reglas fundamentales primarias del cálculo y el concepto de cantidad.

Luego de exponer algunas "reglas para la división", que subrayan el procedimiento, la división por la unidad, la equivalencia de una división a la unidad y los usos de esta operación, el autor introduce los números quebrados y los decimales. Además de caracterizar estos números, la disposición en el libro de texto vincula tanto los quebrados como los decimales con la operación de dividir. Esto es, con la expresión de las partes de una unidad mediante un cociente.

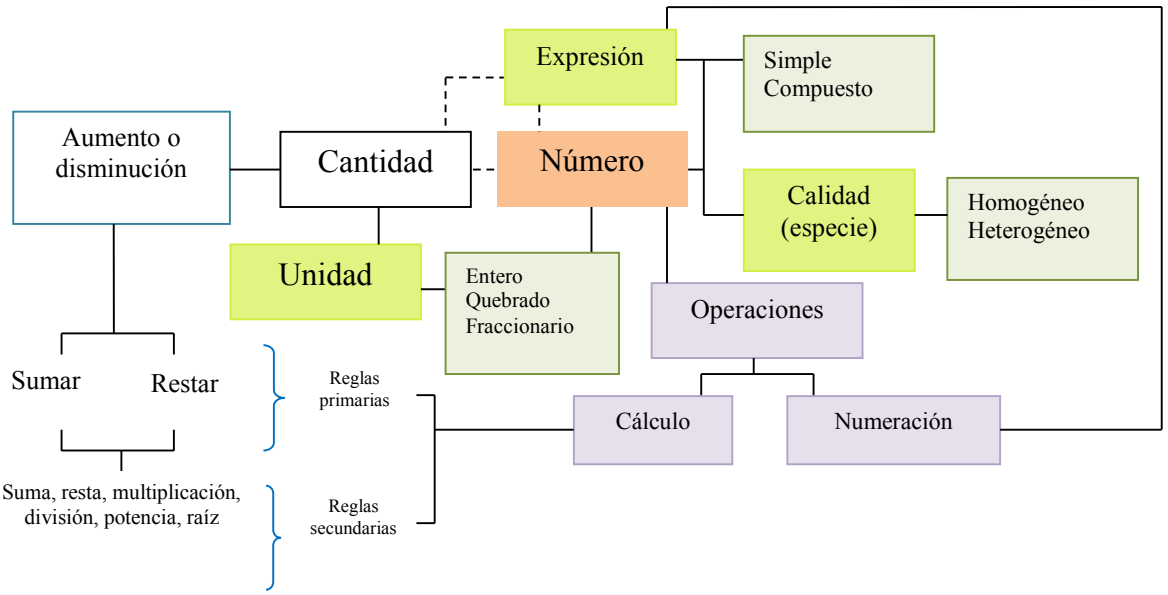
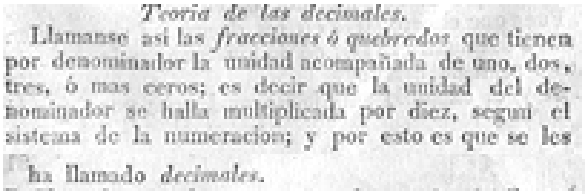


Figura 5. Relaciones entre el número y otros conceptos.

Sobre los quebrados, resalta su definición, representación (como "división indicada" mediante una expresión fraccionaria) y las propiedades mostradas a través de "teoremas". Estos refieren a la amplificación, el aumento del numerador o el denominador y su relación con la variación en el valor del número: "3. Si permanece uno mismo el denominador y se aumenta el numerador, el quebrado se hace mayor" (p. 11). También, se muestran la simplificación y homogenización de quebrados (reducción a denominador común). Esta exposición se acompaña de las operaciones suma, resta, multiplicación y división particularizadas a los números quebrados. Como un caso particular, estas operaciones se adaptan a los quebrados que se acompañan de números enteros: números fraccionarios (mixtos). Esto acentúa la presentación de procedimientos en el libro de texto y un acento a las operaciones aritméticas.

El autor presenta los decimales como un caso especial de los quebrados o fraccionarios. Estos tienen un denominador igual a 1 acompañado de ceros (figura 6). Su representación es simbólico-numérica mediante los "guarismos" enteros y decimales separados por una coma. Su denominación está definida por el denominador 10, 100, 1000. Esto es, décimas, centésimas y milésimas, respectivamente.



Teoría de las decimales.

Llamanse así las *fracciones ó quebrados* que tienen por denominador la unidad acompañada de uno, dos, tres, ó mas ceros; es decir que la unidad del denominador se halla multiplicada por diez, segun el sistema de la numeracion; y por esto es que se les ha llamado *decimales*.

Teoría de las decimales

Llamanse así las *fracciones ó quebrados* que tienen por denominador la unidad acompañada de uno, dos, tres, ó mas ceros; es decir que la unidad del denominador se halla multiplicada por diez, según el sistema de la numeración; y por esto es que se les ha llamado *decimales* [sic].

Figura 6. Definición de números decimales (pp. 20-21).

Las operaciones suma, resta, multiplicación y división con decimales constituyen un fundamento en esta sección. Aquí se explican los procedimientos y se muestra un ejemplo numérico para cada una. La figura 7 presenta una estructura conceptual sobre los quebrados y decimales en el texto.

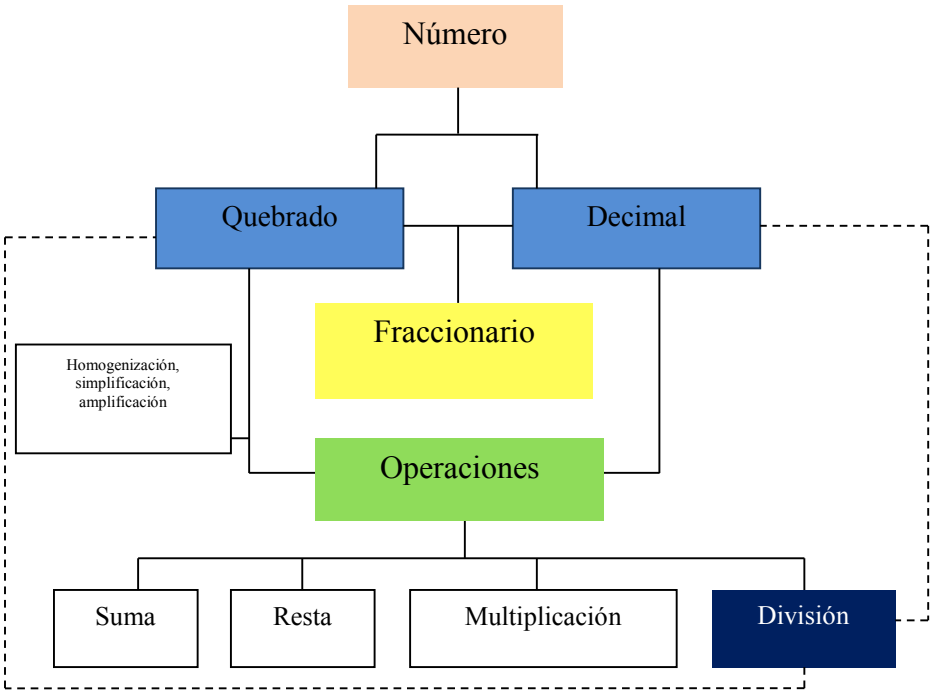


Figura 7. Quebrados, decimales y operaciones.

Posterior a la clasificación numérica descrita, el autor destaca las potencias y las raíces cuadradas y cúbicas. Enfatiza las definiciones y los procedimientos para su cálculo. La potencia, también llamada "potestad", se define desde la multiplicación reiterada de un mismo número. El procedimiento para calcular la raíz cuadrada y cúbica es complejo: involucra multiplicaciones, potencias y divisiones.

Este apartado concluye con un apéndice sobre las raíces no enteras (cuadradas y cúbicas) que involucran decimales en su equivalencia. En este caso se refiere a aproximaciones de estas raíces. Finalmente, se abordan las razones y proporciones enfatizando su definición, su clasificación (aritmética y geométrica, discreta y continua), propiedades y se introduce el concepto de progresión a partir de la proporción continua con su respectiva clasificación (aritmética y geométrica).

Representaciones

La representación verbal (texto en prosa) constituye el modo más utilizado en el libro de texto. Un modo de representación característico de un texto con el estilo catecismo basado en una secuencia de preguntas y respuestas cerradas. El autor acentúa este tipo de representación al introducir el número: "es un signo que representa la unidad ó unidades de que se compone una cantidad determinada [sic]" (p. 3). Las representaciones simbólicas adquieren un realce particular en la presentación de procedimientos. El uso de signos para las operaciones (+, -, X, —, √) y las proporciones aritmética continua (÷) y geométrica continua (÷÷), expresiones numéricas (fracciones y mixtos) y algoritmos son ejemplos de estas. El texto anexa dos tablas con las equivalencias cuadradas y cúbicas de los números enteros (de 1 a 9). La figura 8 muestra representaciones simbólica y tabular.

(c) Es bien que el Estudiante tenga de memoria las dos tablas siguientes.

TABLA 1.

De los quadrados y sus raizes.

	Raiz.		*Quadrado.*
El Quadrado de...	1	es	1.
	2	es	4.
	3	es	9.
	4	es	16.
	5	es	25.
	6	es	36.
	7	es	49.
	8	es	64.
	9	es	81.

1,4 9 | 12,2
0 4,9
2 2
0 5,00
2 42
0 16

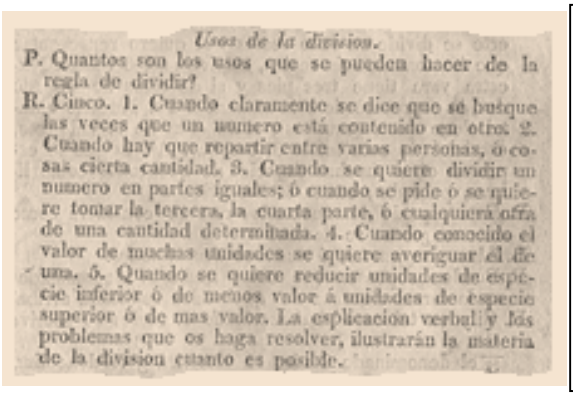
Figura 8. Representaciones simbólica y tabular.

El libro de texto carece de variedad en las representaciones, el modo verbal y simbólico constituyen la dupla predominante en la exposición de conceptos y procedimientos.

Fenomenología

El estilo catecismo hace del libro de texto una exposición de preguntas y respuestas. Estas tareas, en su mayoría conceptuales (teóricas), limitan una diversidad de situaciones y contextos que muestren el uso de los conceptos matemáticos.

Los fenómenos presentes caracterizan un contexto matemático. Las situaciones mostradas enfocan la presentación de definiciones sobre conceptos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, "si me propongo dividir 2400 por 200 escriviré asi 24(00 | 2(00 [sic]" (p. 8). También, el autor presenta un apartado sobre los "Usos de la división" que destacan su utilización en situaciones matemáticas (figura 9).


Usos de la division.

P. Quantos son los usos que se pueden hacer de la regla de dividir?

R. Cinco. 1. Cuando claramente se dice que se busque las veces que un numero está contenido en otro. 2. Cuando hay que repartir entre varias personas, ó cosas cierta cantidad. 3. Cuando se quiere dividir un numero en partes iguales; ó cuando se pide ó se quiere tomar la tercera, la cuarta parte, ó cualquiera otra de una cantidad determinada. 4. Cuando conocido el valor de muchas unidades se quiere averiguar el de una. 5. Quando se quiere reducir unidades de especie inferior ó de menos valor á unidades de especie superior ó de mas valor. La explicacion verbal y los problemas que os haga resolver, ilustrarán la materia de la division cuanto es posible.

Usos de la división

P. Quantos son los usos que se pueden hacer de la regla de dividir?

R. Cinco. 1. Cuando claramente se dice que se busque las veces que un número está contenido en otro. 2. Cuando hay que repartir entre varias personas, o cosas cierta cantidad. 3. Cuando se quiere dividir un número en partes iguales; ó cuando se pide ó se quiere tomar la tercera, cuarta parte, ó cualquiera otra de una cantidad determinada. 4. Cuando conocido el valor de muchas unidades se quiere averiguar el de una. 5. Quando se quiere reducir unidades de especies inferior ó de menos valor á unidades de especie superior ó de mas valor. La explicación verbal y los problemas que os haga resolver, ilustrarán la materia de la división cuanto es posible. [sic]

Figura 9. Usos de la multiplicación desde un contexto matemático (p. 9).

Al referir a unidades de diversas "especies", se distingue un uso contextualizado de la división en situaciones metrológicas, como el comercio. Esto es explícito cuando se muestra el número quebrado: "nuestro quintal tiene cuatro arrobas y si de ellas he tomado tres, escribiré de este modo 3 arrobas [sic]" (p. 10). Nótese como las unidades de medida contextualizan cantidades específicas mediante la combinación entre estas y la numeración.

El contexto predominante es el matemático. Las situaciones mostradas enfocan el uso de los conceptos y procedimientos matemáticos para cálculos aritméticos.

Conclusiones

Conceptualmente, el libro de texto enfoca conceptos básicos de la aritmética. La instrucción en el uso de operaciones básicas aplicadas a los números enteros, quebrados y decimales constituye uno de los propósitos del autor. Esto otorga a los procedimientos matemáticos (sobre las operaciones) un realce significativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la época.

La riqueza de procedimientos aritméticos se ilustra con el modo de representación verbal. Este constituye el medio para presentar los conceptos y procedimientos con algunas representaciones simbólicas y una aislada representación tabular para sintetizar algunos cálculos. El libro de texto se dedica a la presentación de situaciones en un contexto matemático. El autor descarta presentar el uso y aplicación de conceptos matemáticos en otros entornos.

La investigación fortalece la línea para el estudio de libros de texto históricos que profundice en identificar características y especificidades didácticas en los libros textos para la enseñanza de las matemáticas en España y los territorios de la Corona en América, en ésta y otras épocas.

Referencias

Amaral, A., Ralha, E., & Gomes, A. (2011). The historical approach of the fundamental concept of measurement in Portuguese mathematics textbooks for 5th and 6th grades. En E. Barbin, M. Kronfellner, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Sixth European Summer University–History and Epistemology in Mathematics Education* [CD-ROM] (pp. 259-270). Vienna, Austria.

Aznar, J. V. (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, España.

Belisario, A. y González, F. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en educación Matemática. *Unión, 31,* 161-182. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_16_de_volumen_31.pdf

Beyer, W. (2009). Catecismo y matemáticas: concluencia de corrientes de pensamiento. *Paradígma, 30*(1), 117-150. http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1011-22512009000100007& script=sci_arttext

Beyer, W. (2013). La aritmética de Romero y Serrano: Primer libro de matemáticas impreso en Venezuela. *Paradigma, 34*, 109-122.

Carrillo, D. (2005). *La metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Murcia, España: Universidad de Murcia, España.

Del Olmo, M., Rico, L., & Sierra, M. (1996). Textos de aritmética para la formación inicial del maestro (1830-1930). En P. Ballarín, et al. (Eds.), *IX Coloquio de historia de la educación. El currículum: historia de una mediación social y cultural* (pp. 351-356). Granada, España: Osuna.

Fauvel, J., & Gray, J. (1991). *The history of mathematics: a reader*. Hong Kong, China: Macmillan Press-The Open Univertity.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (2014). Handbook on the History of Mathematics Education. New York, NY: Springer.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es /tesisugr/15378184.pdf

Ortiz, J. (1998). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en libros de texto de bachillerato* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Osejo, R. (1830). *Breves lecciones de aritmética para uso de los alumnos de la Casa de Sto. Tomás*. San José, Costa Rica: Imprenta de la Paz.

Picado, M., & Rico, L. (2011a). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Epsilon, 28*(1), 99-112.

Picado, M., & Rico, L. (2011b). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27. Handle: http://hdl.handle.net/10481/16013

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX* (1849-1892). Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7464/

Pinto, E. y González, F. (2013). Las ecuaciones lineales en los libros de texto de matemáticas para Educación Básica en Venezuela: 1987-2007. *Unión, 35,* 177-201. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo15.pdf

Rico, L. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, M. Molina, & J. L. Lupiñanez (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Ruíz, A. (Ed.). (1994). *La historia de las matemáticas en Costa Rica*. San José, Costa Rica. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20de%20las%20matematicas%20en%20Costa%20Rica.pdf

Segovia, I., & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid, España: Síntesis.

Sierra, M., González, M., & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Van Dalen, D., & Meyer W. (1971). *Manual de técnica de la investigación educacional*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Zelaya, C. (1973). *Rafael Francisco Osejo*. San José, Costa Rica: Ministerio de Cultura, Juventud y Deportes.

Zuin, E. (2011). Sistema métrico decimal em um best seller de António Trajano. En Gitirana, A., Bellemain, F., Branco, W., Lisboa, G., Guimarães, G., Gomes, F., et al. (Eds.), *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil: Laboratório de Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco. http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ ciaem/paper/view/2293/569

Antanairesis:
un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad

Diana Isabel **Quintero** Suica
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma_dquintero472@pedagogica.edu.co
Nathalia **Valderrama** Ramírez
Fundación Universitaria del Área Andina y Universidad Nacional de Colombia
Colombia
nkvalderramar@unal.edu.co

Resumen

Esta comunicación presenta un trabajo realizado por una docente en formación y la docente titular de un grupo de estudiantes de grado séptimo del colegio Manuela Beltrán IED en Bogotá, Colombia. Como propuesta de enseñanza describe una estrategia que utiliza como herramienta didáctica la historia de las matemáticas para introducir el concepto de proporcionalidad a partir de un método denominado "El método de antanairesis o antiphairesis" el cual fue utilizado por los matemáticos Griegos para hallar la medida común de una pareja de magnitudes del mismo tipo y la proporción de estos. Dada la importancia de la historia en la construcción de las matemáticas se diseña la propuesta de enseñanza, se lleva al aula apoyada de material didáctico y se evalúa desde la mirada de las dos docentes, destacando fortalezas y debilidades evidenciadas en el aula y específicamente en las actuaciones de los aprendices.

Palabras clave: proporcionalidad, razón, antanairesis, antiphairesis, matemática griega.

El concepto de proporcionalidad

Marco histórico y matemático

El marco que a continuación presentamos se encuentra ilustrado desde dos perspectivas: el trabajo que presenta Guacaneme (2001) sobre el concepto de proporcionalidad en su trabajo de tesis de maestría, y una consulta en textos históricos sobre el método de antaniresis y el uso que en dichos textos se muestra de éste.

De la enseñanza de la proporcionalidad. En el análisis de varios textos de matemáticas Guacaneme (2001) muestra algunas de las contradicciones que se generan, tanto matemática como intuitivamente al hablar indistintamente de la razón y el cociente exacto entre dos números.

En síntesis, muestra algunas definiciones introductorias usuales que se usan en textos para explicar el concepto de proporcionalidad, para luego hacer algunas aclaraciones sobre las implicaciones que se establecen al hacer las interpretaciones de estas.

Por ejemplo, para definir las fracciones de números reales, uno de los textos consultados por él indica que es "un ente constituido por un par de números reales, donde se supone el segundo de ellos no es cero. Si α y β son éstos, la fracción se representa así: α/β". El mismo texto indican que "la fracción α/β es el valor del cociente exacto entre los números reales α y β y por tanto un número real. Al cociente indicado α/β o α: β se le denomina también razón de los números α y β".

A partir de estas definiciones, el autor hace ver las siguientes dificultades:

> En la definición de fracciones de números reales no se hace explícito el por qué se considera que el β no debe ser cero, lo cual cobra sentido es en la definición de cociente exacto.
>
> Señala que al afirmar que una pareja ordenada de números reales es igual a otro número real objeta la intuición de que *dos no puede ser uno,* y por otro, infringe con las normas de la estructura lógica y rigurosa de la matemática.
>
> Sugiere pensar, para definir razón, en una función cociente que asigne a cada pareja de números reales α y β el número γ, de tal forma que se admita la existencia de una relación de equivalencia entre parejas ordenas y un cociente exacto y no el de igualdad entre la fracción y cociente, es decir, considerar que una razón no es un número real, sino que es una pareja de números reales. Con base en esto, se puede concebir a la proporción como una relación entre las razones y no como una igualdad entre dos cocientes.

Del método de Antanairesis. Con base en las observaciones descritas en el marco de referencia de la enseñanza de la proporcionalidad, se hizo preciso buscar una alternativa diferente a las usuales sugerencias en los libros de textos escolares, para elaborar una propuesta de enseñanza de este concepto. Sin embargo, no encontramos documentada (por lo menos en nuestra búsqueda) dicha alternativa para implementar en el aula.

La "idea", reside en uno de los tantos métodos utilizados por los antiguos griegos para hacer matemática. Dicho método se conoce con el nombre de antanairesis[1], aunque su nombre se popularizó como *algoritmo de Euclides*.

El método básicamente consiste en hallar una medida común a dos magnitudes dadas. Dicha medida se puede obtener por medio de la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Ésta sustracción genera una n-upla de números que describen la razón entre ambos objetos.

Un ejemplo, es la razón que conserva el círculo con el cuadrado cuyo lado es su diámetro. Cuando las razones entre dos círculos y los cuadrados cuyos lados son los diámetros de estos círculos son las mismas, entonces las dos parejas de objetos son proporcionales. Basta ver que todas las razones posibles entre estos dos tipos de objetos son iguales debido a que la razón siempre es **π**

Fowler (1999) presenta un diálogo artificial, que se supone sostendrían Sócrates y un esclavo y que se expondría en los diálogos de Platón sobre el problema ¿*Cuál es la relación del tamaño entre un cúmulo de sesenta piedras, y un cúmulo de veintiséis piedras*? A continuación

[1]También conocido como *Antiphairesis.* La expresión "antanairesis" es derivada de la composición *anti-ana-hairesis*que significa retracción recíproca; y "antiphairesis" derivada de *anti-hypo-hairesi*que significa sustracción recíproca de acuerdo a Fowler (1999). Aunque se ha argüido que las dos palabras tienen un diferente significado, en el presente documento se les da el tratamiento de sinónimos.

presentamos un fragmento de dicha conversación.

> *Sócrates*: Dime esclavo, ¿Cuál es la relación de tamaño entre un cúmulo de sesenta piedras y un cúmulo de veintiséis piedras?
>
> *Esclavo*: ¿Quiere decir el número de veces que el pequeño está en el grande?
>
> *Sócrates*: Exacto
>
> *Esclavo*: Está más de dos veces pero menos de tres
>
> *Sócrates*: ¿Puedes ser más preciso?
>
> *Esclavo*: Está un par de veces con ocho piedras sobrantes.
>
> *Sócrates*: Estas ocho piedras no están relacionadas con alguna otra cosa.
>
> *Esclavo*: Omití decir que estas están en relación con el otro montón de veintiséis piedras.
>
> *Sócrates*: Explícame
>
> *Esclavo*: Dame un momento. Puedo describir las relaciones en la misma vía. Es decir, dos veces en el primer paso, y luego dirás la relación entre las ocho piedras y las veintiséis piedras.
>
> *Sócrates*: Continua
>
> *Esclavo*: Nuevamente, este debe ser el número de veces que el pequeño está en el grande: esta es tres veces; y entonces la relación entre dos piedras y ocho piedras, la cual es cuatro veces exactamente.
>
> *Sócrates*: Has extraído la relación expresada por: primer paso, dos; segundo paso, tres veces; tercer paso, cuatro veces exactamente. El nombre técnico para esto es una razón.
>
> (60:26 = [2, 3, 4]) (pp.24 - 25)

Aunque en la actualidad solemos denotar las razones inconmensurables por medio de los números irracionales, para los griegos la palabra *número* sobreentendía que este era entero positivo por lo cual, un número a/b no indicaría un número racional sino una especial relación entre los números *a* y *b* a lo cual denominaron razón Gonzales (2008).

Algunos indicios de esto se pueden ver en el libro *Elementos* de Euclides, el cual reunía los conocimientos matemáticos hasta ese momento descubiertos bajo un sistema axiomático, en la presentación de la teoría de las proporciones de Eduxio en el libro V. Allí, particularmente en la definición 3 y 4, se muestra la descripción de lo que es una razón, entendida como "una especie de relación respecto del tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo"; y de cuando dos magnitudes tienen una razón o proporción, indicando que estas "tienen una relación una a la otra cuando se es capaz de multiplicar excediendo una a la otra" Fowler (1999). También se muestra en el libro VIII definición 20, que "dos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo que el tercero del cuarto".

Para entender la definición de Eudoxio de la proporción, usualmente suele traducírsele a la notación algebraica moderna, así: a:b = c:d si para todo par de enteros m, n, se tiene que ma > nc Corry (s.f.). Dicha definición se estableció de forma que pueda ser aplicable a parejas de segmentos, entre dos áreas o, inclusive, entre dos volúmenes Corry (s.f.).

A partir de este marco de referencia encontrado en el estudio de la historia de la matemática, se plantea la propuesta de acción en el aula la cual describiremos a continuación.

Propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza se diseña con el objetivo de introducir el concepto de proporcionalidad a partir de "el método de antanairesis" para implementar con un grupo de 36 estudiantes de grado séptimo de escolaridad, del colegio Manuela Beltrán IED. Las docentes responsables tienen el rol de docente en formación y docente titular de la práctica profesional, quienes participan conjuntamente en el diseño, la implementación y la evaluación de la propuesta y de los resultados del método mismo.

Los recursos utilizados para llevar a cabo las actividades propuestas fueron de dos tipos: material concreto y material intangible. El material concreto, utilizado en la primera sesión, fueron palitos de madera, los cuales se proporcionaron a cada pareja de estudiantes en grupos de trece palitos, cinco de un color y ocho de otro como se muestra en la imagen.

Figura 1. Material concreto.

El material intangible, utilizado en la segunda sesión, fueron las representaciones de parejas de segmentos de diferente medida. Para ilustrar el algoritmo de Euclides, se tomaron segmentos de ocho y cinco unidades. Para plantear las siguientes tareas relacionadas con hallar la razón y verificación de proporcionalidad, se usaron dos parejas de segmentos: una con representaciones cuya medida eran el doble de los segmentos de ocho y cinco unidades; y la otra con segmentos de veintisiete y doce unidades, y sus respectivos tercios.

Para hablar de la metodología, es de especial importancia mencionar que las tareas propuestas se desarrollaron en dos sesiones de clase, cada una de cien minutos las cuales se describen a continuación.

2.1 Primera sesión: En ésta sesión, después de hacer entrega del material didáctico (palitos), se propuso la siguiente tarea

"¿Cuál es la medida común (o número de palitos) a cada una de las dos colecciones de palitos? Es decir, si se hace un grupo de n palitos con el cual puede medir exactamente cada cúmulo ¿Cuál debe ser el valor de n?"

Para abordar el problema se tomaron tres conjuntos de palitos, a saber:

Conjunto 1: Seis palitos de un color y tres del otro.

Conjunto 2: Seis palitos de un color y cuatro palitos del otro.

Conjunto 3: Ocho palitos de un color y cinco palitos del otro.

Estos tres conjuntos se eligieron de esta manera de forma tal que la medida común en una pareja fuera el mismo número de la menor cantidad de palitos, en otra solo hubiese como medida común uno, y en la tercera pareja donde la medida común no solo fuese uno, sino que además esta(s) otras medidas, fuesen diferentes a la menor cantidad de palitos.

Posterior a esto se propuso encontrar las medidas comunes a conjuntos de palitos que fuesen el doble de los conjuntos anteriores, es decir

Conjunto 4: Doce palitos de un color y seis del otro.

Conjunto 5: Doce palitos de un color y ocho palitos del otro.

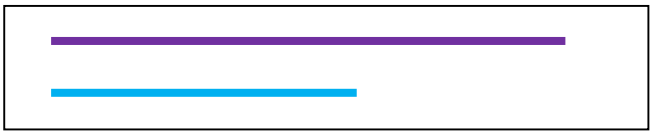
Conjunto 6: Dieciséis palitos de un color y quince palitos del otro.

Con este trabajo para hallar las medidas comunes se pretendía definir el *Máximo Común Divisor* como la medida común que tiene mayor magnitud entre otras dos dadas.

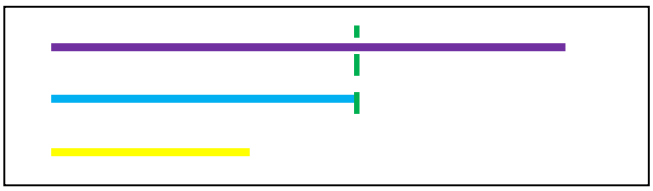
Segunda sesión: En la segunda sesión de clase se propuso, a partir de la representación de dos segmentos, la siguiente tarea:

"¿Cuál es la medida común a cada uno de los dos segmentos? Es decir, si se construye un segmento con el cual puede medir exactamente cada uno de los otros dos ¿Cuál es dicho segmento?"

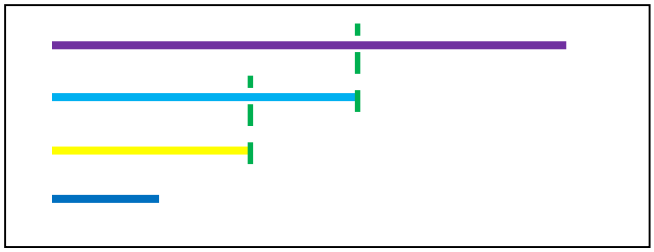
A partir de este problema se mostró el método de antanairesis así: Sean *a* y *b* dos segmentos como se muestran a continuación.



Entonces, al de mayor longitud le resto el de menor longitud tantas veces como pueda, que en este caso particular se podrá efectuar la sustracción solo una vez - [1,] -, y el resto se representa con el segmento amarillo.



Se efectúa nuevamente la sustracción, pero en esta ocasión al segmento turquesa se le resta el segmento amarillo. Como se puede observar, nuevamente puedo efectuar la resta una vez - [1,1,] y el resto estará simbolizado por el segmento azul.



Se lleva a cabo el procedimiento, tantas veces como sea necesario hasta que el residuo se pueda restar al segmento inmediatamente anterior – [1,1, …, n] – de tal forma que el resto sea cero. La medida común máxima entonces será el último segmento encontrado.

Luego de esto, se plantea la pregunta: si al extender cada uno de los segmentos dos veces, ¿estos conservarán la misma medida común máxima? y ¿la n-upla que representa el procedimiento para hallar ésta es la misma?

Como la n-upla iba a ser la misma, se definió la proporcionalidad como una relación entre, por lo menos dos parejas de objetos del mismo tipo que tienen una misma razón. También con esto se identificó la case de equivalencia correspondientes a parejas de segmentos que guardan la misma razón.

Actuación de los aprendices: Aunque, en la primera sesión, se esperaba que alguno llegara a decir que una medida común fuese la mitad de un palito, un cuarto, un octavo y por lo tanto, podían ser infinitas las medidas comunes, los estudiantes no expresaron esto en la primera sesión. No obstante, en la segunda sesión, al trabajar con segmentos, sí lo indicaron y reconocieron el proceso al infinito de obtener partes de la medida común como medidas comunes igualmente. Se presume que esto fue debido al contexto (discreto o continuo) en el que se estaba hablando, ya que para el estudiante no era tan obvio dividir mentalmente uno de los palitos pero si lo era dividir el segmento.

Ismael, uno de los estudiantes, indicó que para probar si un número dado era la medida común, entonces él tomaba el número dado y verificaba cuantas veces cabía en cada una de las cantidades de palitos dadas. Cuando realizó la explicación tomó como ejemplo, en el primer conjunto, al número tres. Dibujó los seis palitos y empezó a tachar de tres en tres, es decir, estaba haciendo una sustracción iterada. Esto abría el camino para llegar al método de antanairesis para hallar la medida común a cualesquiera dos cantidades de palitos.

No obstante, en medio de esto, surgen algunas conjeturas por parte de los estudiantes respecto a las medidas comunes. Una de ellas, por ejemplo, es que *uno es la medida común a cualquier pareja de cantidades palitos*, lo cual es cierto ya que desde el punto de vista matemático cualquier número es divisible por uno y el resultado es el mismo número.

Otra de las conjeturas, esta vez más interesante, se dio en medio de la argumentación de Ismael que justificaba su procedimiento para hallar la medida común. Él afirmó que si uno de los números de palitos era par y el otro era impar, entonces la medida común a ambos números era uno. Se presume que lo hizo partiendo del caso particular de la tarea propuesta con los ocho y cinco palitos y lo generalizó para cualquier caso. Sin embargo, una de las estudiantes refutó la conjetura de Ismael presentando un contraejemplo: diez palitos de un color y cinco del otro. Ella justificó la razón por la cual era un contraejemplo, ya que un número era par, el otro impar y aún así la medida común no era solo el uno (por ejemplo el cinco también era medida común).

Seguido de esto Ismael reestructuró su conjetura indicando que una condición adicional para que fuese verdadera es que ninguno de los dos números fuese múltiplo del otro. En síntesis la conjetura fue:

Dados dos números, tal que uno de ellos sea par y el otro impar, y ninguno sea múltiplo del otro entonces la medida común entre los dos era solamente uno.

Se discutió con los estudiantes la validez de la afirmación anterior encontrando el contraejemplo que daba cuenta de la falsedad de la afirmación. El ejemplo que se propuso fue la

pareja (12, 27)[2]. Cuando se analizó esta pareja de números con los estudiantes se podía concluir que cumplían ambas condiciones (el número doce es par, el número veintisiete es impar. Ninguno de los números es múltiplo del otro), y aun así, su medida común no era solamente uno ya que, por ejemplo, el número tres también es una medida común a ambos. Esto, además evidencia que al no reconocer a la razón como un cociente exacto, tal como se indicó en el marco histórico y matemático de acuerdo a los aportes e Guacaneme (2001), identifican la multiplicidad de medidas comunes a dos cúmulos dados y no lo asocian a un único número.

Como la pareja de segmentos que se dibujó inicialmente en la segunda sesión, estaba ajustada a las unidades traslucidas que tiene el tablero, siendo uno de doce unidades y el otro de seis unidades, para Laura, una de las estudiantes, fue sencillo decir que la medida común era el número tres. Sin embargo, el problema planteaba la búsqueda de un segmento; no de un número, lo cual se le aclaró a ella en su momento. Posiblemente esto surge, debido a que los estudiantes se encuentran acostumbrados a simplificar todos los objetos matemáticos a números porque les es más fácil tratar con estos últimos, lo cual es comprensible y aceptable. Sin embargo, la respuesta de esta estudiante también hace ver la superación, por lo menos en el caso particular de ella, de la noción de la razón como un cociente entre las magnitudes de los segmentos, de lo contrario su respuesta a la medida común de los segmentos hubiese sido dos.

Para terminar, no hubo alguna mención por parte de los estudiantes sobre la selección de un par de segmentos cuyo proceso de antanairesis fuese infinito, es decir segmentos inconmensurables. Para la propuesta de clase se consideraron los casos en los cuales la n-upla que describía la razón entre dos segmentos tenía un número finito de componentes y no se incluyó la posibilidad de explorar este suceso. Esta última razón puede ser una de las causantes para que no se hiciera mención a la inconmensurabilidad ya que los estudiantes en general seguían el patrón de ubicar, en lo posible, segmentos de tal forma que uno fuese múltiplo del otro.

Pertinencia y aportes de "el método antanairesis" al proceso de enseñanza aprendizaje

Como educadores de las matemáticas en la escuela y desde las diferentes concepciones del ser docente, debe existir el momento en el que como elementos importantes y decisivos en el proceso de enseñanza aprendizaje reflexionamos acerca de nuestras prácticas. A continuación se describen algunos aspectos importantes de la puesta en práctica de la propuesta de enseñanza a partir de "el método de antanairesis" como una herramienta propia de la historia para introducir el concepto de proporcionalidad en estudiantes de grado séptimo.

Teniendo en cuenta que la enseñanza en la escuela debe cumplir un sin fin de retos específicos del contexto en el que se desarrolla y de las características propias de los aprendices y que a pesar de los diferentes intentos por abolir el paradigma que se tiene de las matemáticas como una ciencia para unos pocos que son aptos, exclusivos y con características intelectuales específicas para acceder a esta ciencia. Hoy por hoy aun nos encontramos bajo dicho paradigma, el cual por un lado nos aleja cada vez más del ideal de vencer dichos retos y llegar al éxito esperado en la escuela y por otro lado, justifica el constante fracaso ante los aprendizajes escolares.

[2]Notación acordada en el aula de clase para designar la cantidad de palitos de cada uno de los colores. En el caso particular se pensaba en doce palitos de un color y veintisiete del otro.

Desde esta perspectiva una de las principales tareas del educador matemático está en orientar a sus aprendices por los diferentes caminos de acceso a este mundo de conocimiento matemático útil para la vida y posibilitar a partir de sus prácticas la motivación, el aprendiz interés por el conocimiento, incluso en aquellos se consideran hacen parte del fracaso escolar, frente a las matemáticas ¡La tarea no es fácil! Ames (1987) ha llamado "reentrenamiento cognitivo" al tratamiento que se debe dar al fracaso en la escuela, el cual en la mayoría de los casos obedecen a la desconfianza que tienen los aprendices en sí mismos, en sus habilidades académicas y a la poca capacidad que consideran tener para enfrentarse al conocimiento y a la resolución de un problema. Se establecen tres pasos para afrontar dicho tratamiento: La primera, el reentrenamiento para identificar los orígenes del fracaso: propone exponer a los aprendices a una serie de tareas bien planeadas cuyo diseño asegurara la experiencia del logro a partir del modelaje, la socialización y el intercambio de ideas. La segunda, el entrenamiento para establecer metas alcanzables: plantea una guía y/o orientación al aprendiz en la que sea capaz de reconocer sus habilidades y capacidades al afrontar sus tareas de forma razonable y, la tercera, obedece al entrenamiento para aprender estrategias destinadas a la resolución de problemas: en esta ultima el aprendiz es capaz de decidir y lograr estrategias a partir del modelaje y la instrucción utilizadas a la hora de resolver por sí mismos un problema.

Ahora bien, y centrados en la reflexión que como docentes hacemos a la puesta en práctica de la propuesta de enseñanza a partir de "el método de atanairesis" además de las descritas en las actuaciones de los aprendices, resaltamos lo que para nosotras es lograr la motivación evidenciada en los aprendices en su totalidad al enfrentarse con las tareas de forma positiva, interesada y teniendo confianza en sí mismos a la hora de justificar sus acciones (acciones matemáticas). La simplicidad del método, el material tangible y la instrucción guiada dieron paso a la posibilidad de socializar los argumentos de cada uno, contradecir los del otro para defender sus ideas, generar un debate cognitivo en el aula, hacer uso de conocimientos ya adquiridos para justificar sus conjeturas como es el caso de los múltiplos, divisores, máximo común divisor, el número 1 como divisor de cualquier número, y adquirir aprendizajes incluso en los errores cometidos, genero un ambiente de confianza e interés por participar y acceder al conocimiento, ya que como ellos mismos lo manifestaban "estaban entendiendo". Dichas evidencias de motivación y trabajo por parte de los aprendices parecen atender al llamado "reentrenamiento cognitivo" descrito anteriormente.

Por un momento se tornó en el aula un espacio de aprendizaje agradable, interesante, amable, divertido, emocionante, al cual todos pudieron acceder sin embargo, como bien sabemos es necesaria la formalización del objeto matemático en cuestión y fue allí donde se presentó una dificultad. Si bien los aprendices se familiarizaron con el método "lo entendieron" estaban a un paso de llegar a la relación de proporcionalidad a partir de lo que ya se tenía y lo más importante se tenía "entendido" de momento se evidencio una ruptura en dicha aura que contemplaba la clase. Como lo describe la docente orientadora quien observaba detenidamente la clase, se sintió caer un tempano de hielo que enfriaba las emociones de los aprendices y reflejaba en ellos caras de preocupación por el paso que daban (formalizar en un lenguaje matemático el concepto), o mejor el paso que daba la docente quizás con algunos pocos que seguían sus ideas "matemáticamente habladas", afortunadamente hubo quienes no se rindieron y después de haber salido del posible "fracaso" y sentir que desvanecían nuevamente, esto les dio la fortaleza para hacer un aporte más importante que si hubiesen definido en ese momento la proporcionalidad y fue decir "no entiendo" en este momento la docente retoma la instrucción de manera muy guiada y explicita intentando llevar a todos nuevamente y aunque lo logra, se pierden emociones de la clase.

Conclusiones

Uno de los factores que se identifican como importantes (y casi como esenciales) al momento de desarrollar las actividades propuestas en el aula, es la motivación de los estudiantes entendida esta como el interés y actitud que nace por parte de ellos al ver que los recursos (en este caso palitos de colores y representaciones de segmentos) son asequibles a su nivel de conocimiento, evento que no sucede cuando desde el inicio el discurso del docente esta permeado del formalismo que usualmente se maneja en la escuela.

La historia, como recurso didáctico, es una fuente inagotable para idear propuestas de enseñanza de las matemáticas y enriquecer los conocimientos del futuro docente. Ésta permite utilizar elementos que para los estudiantes son muchos más intuitivos y que desarrolla en ellos una habilidad innata, como la que seguramente experimentaron los matemáticos y pensadores en la época en que surgió el concepto enseñado.

De otro lado, la historia nos ilustra, en algunas ocasiones, sobre los errores y obstáculos que pueden llegar a mostrar los estudiantes al momento de apropiarse del conocimiento, debido a que son las dificultades que son naturales en la construcción de los conceptos. Además, de rechazar, en cierta medida una de las concepciones que de los matemáticos se tiene (y en general de cualquier persona que hace actividad matemática), y es que son seres que un día divulgaron una idea genial e innovadora y del cual no se conocen las dificultades y obstáculos que se presentaron para llegar a dichas ideas. Sin embargo, ésta muestra a los actores involucrados en el proceso educativo que esto es erróneo, debido a que para llegar a esa "ideas geniales" hubo un camino arduo lleno de equivocaciones y análisis, para resolver los problemas.

Por otro lado, concluimos la importancia de considerar para esta propuesta y en general para cualquier propuesta de enseñanza de las matemáticas, establecer en un inicio relaciones entre un lenguaje cotidiano del aprendiz y el objeto matemático en estudio, de tal manera que él encuentre un lenguaje propio con sentido útil para referirse a las relaciones encontradas a partir del método; para nuestro caso la relación de proporcionalidad. Posteriormente cuando el docente tenga certeza de que el aprendiz dio el paso del método a la generalización de un concepto, propiedad y/o relación matemática, introduzca ahora sí, lo mismo pero en el lenguaje matemático.

Referencias y bibliografía

Ames, C. (1987). The enhancement of student motivation, en Avances y Motivation and Achievement: Enhacing Motivation, M. Maehr y D. Kleyber, Eds., vol.5 Greenwich, CT., Jai Press.

Ames, C. (1990). Motivation: What teachers need to know? *Teacher College Record*. *91*(3), 409 – 421.

Corry, L. (s.f.). La teoría de las proporciones de Eudoxo interpretada por Dedekind. Recuperado de http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf

Fowler, D. (1999). *The mathematics of Plato's Academy: A new reconstruction.* Oxford: Clarendon Press.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia.

Gonzales, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma, 33*(1), 101 – 130. Recuperado de http://www.ejgv.euskadi.net/r53-2291/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_33/8_solucion_eudoxo_33.pdf.

As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo: um olhar para o ensino de Matemática

Daniel Zampieri **Loureiro**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná-Cascavel
Brasil
zampiieri@hotmail.com
Tiago Emanuel **Klüber**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná-Cascavel
Brasil
tiagokluber@gmail.com

Resumo

Nesse trabalho, a partir de nossa interrogação de pesquisa "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*", buscamos compreender algumas das principais características que sustentavam as estruturas teóricas de cada uma das três escolas e relacioná-las com o ensino da Matemática. Efetuamos apontamentos no que tange o ensino de Matemática, visando destacando as categorias epistêmicas: sujeito do conhecimento e objeto matemático. A pesquisa é bibliográfica, ensaística e qualitativa. Em suma, é possível afirmar que o desenvolvimento de ideias, teorias e concepções em torno do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo contribuíram de forma ímpar para o desenvolvimento da Matemática e contemporaneamente, podemos identificar uma relação de coexistência entre essas três escolas, no que se refere ao ensino Matemática.

Palavras chave: Ensino da Matemática, Educação Matemática, Escolas Filosóficas, Epistemologia, Desenvolvimento da Matemática.

Introdução

Este trabalho está inserido no contexto do desenvolvimento da dissertação de mestrado, que trata da abordagem dos conteúdos matemáticos em atividades de Modelagem Matemática. Ela está vinculada ao Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação, nível de Mestrado, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Assim, no sentido de melhor compreender diferentes aspectos que influenciam o ensino, há a necessidade de um olhar para subtemas no que tange a epistemologia e a compreensão da "natureza" do conhecimento matemático.

Destacamos a importância desse olhar epistemológico, visto que é necessário compreender como se constituiu o processo de formalização da Matemática como ciência e possíveis implicações para a área de ensino. Portanto, discutir o tema em questão, requer elucidar o nosso entendimento sobre ele. Assim, compartilhamos daquilo que Bruyne (1982, p. 41) esclarece sobre a importância de distinguir duas funções da própria epistemologia1) metacientífica e 2) intracientífica. A primeira faz referência ao olhar retrospectivo sobre o desenvolvimento mais geral das ciências, estabelecendo "[...] reflexão sobre os princípios, os fundamentos, a validade [...]" e a segunda "[...] representa um polo intrínseco à pesquisa científica".

Convergindo à citação supracitada, buscaremos compreender quais foram os fatores de influência que contribuíram para a Matemática se constituir como Ciência. Para tanto, focaremos, mesmo que rapidamente, nos aspectos intracientíficos e históricos, no intuito de compreender as tentativas de fundamentar a Matemática.

Justificada direção a que nos lançamos, indagamos: "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*" passamos a explicitar a metodologia empregada.

A metodologia empregada

A partir de nossa pergunta diretriz "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*" e considerando que "[...] A interrogação se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido" (Bicudo, 2011, p. 23), buscamos estabelecer seguridade pelo caminho a ser percorrido. Frente ao exposto, versaremos sobre o modo como procedemos nesta investigação.

Destacamos a postura qualitativa de pesquisa assumida por nós, visto que,

> [...] nas abordagens qualitativas, o termo pesquisa ganha novo significado, passando a ser concebido como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador – investigador (Garnica, 1997, p. 111).

Munindo-nos dos "elementos" que se revelam de nossa indagação, devemos ser capazes de, em algum sentido, estar cientes da subjetividade empregada, no que concerne as análises e resultados, já que o modo qualitativo de fazer pesquisa nos permite isso. Desta forma como menciona Bicudo (2011 p. 24) a pesquisa qualitativa pode ser entendia como "[...] um leque diversificado de procedimentos, sustentados por diferentes concepções de realidade e de conhecimento", buscando assim maximizar a qualidade da pesquisa efetuada.

Utilizamos ainda como procedimento, a pesquisa bibliográfica, visto que esta "[...] é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituídos principalmente de livros e artigos científicos" (Gil, 1999, p. 65). Nesse sentido olhamos para obras que abordam ou deram referências do tema por nós estudado.

Levando-se em consideração que nos debruçamos sobre obras que trazem em seu escopo, discussões sobre filosofia no que concerne as três escolas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo) delimitamos unidades de leituras nas obras analisadas, já que estas podem ser compreendidas como, "os limites no interior dos quais se processará a disciplina do trabalho de leitura e estudo em busca da compreensão da mensagem" (Severino, 2007, p. 54). Por fim efetuamos, ainda que não aprofundadamente, uma na análise textual, entendida como o

> [...] processo de reconhecimento de determinada realidade e implica o exame sistemático dos elementos; portanto, é decompor um todo em suas partes, a fim de poder efetuar um estudo mais completo, encontrando o elemento-chave do autor, determinar as relações que prevalecem nas partes constitutivas, compreendendo a maneira pela qual estão organizadas, e estruturar as ideias de maneira hierárquica (Marconi, Lakatos, 2005, p. 27-28)

Tal análise, revelou-se importante já que a partir dessas compreensões de relações constitutivas, identificamos aspectos tidos como essenciais das três grandes escolas filosóficas.

Ainda pudemos explicitar como esses aspectos se inter-relacionam com as práticas de ensino no que diz respeito a determinado conteúdo, instrumentos pedagógicos, postura dos professores.

É valido mencionar, também, que os apontamentos, referentes às três escolas citadas, não são exaustivos, no entanto, são relevantes e permitem responder à questão estabelecida, ainda que careça de aprofundamentos futuros. Assim optamos por sustentar este artigo sob os estudos de Mondini (2008), Machado (2005), Eves (2004), Boyer (2010) e Kessler (2001).

Sobre as escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo

Foi a partir dos estudos desenvolvidos em torno de uma Matemática não só abstrata, mas teórica que podemos considerar "[...] a origem de um modelo que dá surgimento às Ciências, a Filosofia e a Matemática abstrata [...]" (Costa, 2008, p. 34).

Em Boyer (2010) e Eves (2004) é revelado que a busca pela consolidação da Matemática como ciência se deu no decorrer de séculos, onde ideias eram levantadas e refutadas com o mesmo fervor. Disputas por reconhecimento e concretização de teorias eram vulgarmente debatidas na sociedade matemática, na busca incessante pelo reconhecimento acadêmico. Essas disputadas se deram em razão de que em diversos períodos históricos era comum a prática de lançar desafios à comunidade dos matemáticos, visando premiações, reconhecimento e exaltação acadêmica.

As controvérsias e disputas foram tantas, que verdadeiras crises se instalaram no final do século XIX início do século XX. Um dos principais acontecimentos concerne à teoria dos conjuntos, assim intitulada "*la crisis de los fundamentos*"[1] como menciona Kessler (2001). A crise dos fundamentos, relacionada a Teoria dos Conjuntos, foi de "importância impar" visto que esta,

> [...] se transforma na questão central no interior das importantes controvérsias do início do século XX. Na tentativa de restabelecer credibilidade aos fundamentos da Matemática, surgiram três escolas principais: o Logicismo, o Intuicionismo ou Construtivismo e o Formalismo (Costa, 2008, p. 38).

A citação acima, nos remete a menção de Mondini (2008), quando esta expõe a necessidade de livrar a Matemática dos inúmeros paradoxos que a Teoria dos Conjuntos revelou.

> Os paradoxos da teoria dos conjuntos conduziram os embates filosóficos ao clímax, que levou ao surgimento de três grandes escolas filosóficas da Matemática: a escola logicista de Rusell (1872 – 1970), a escola formalista de Hilbert (1862 – 1943) e a escola intuicionista de Brouwer (1881 - 1966) (Kessler, 2001, p. 237, tradução nossa)[2].

Cada uma das escolas, do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, traziam adeptos de renome, como versa a citação de Kessler (2001), os quais buscavam defender a essência de cada uma, apresentando uma nova compreensão de como a Matemática deveria ser estruturada.

---

[1] "A crise dos fundamentos" (Tradução nossa). A crise dos fundamentos traz relação com os paradoxos da Teoria dos Conjuntos, como também com as descobertas de contradições dessa mesma teoria. Para um melhor entendimento a respeito sugere-se a leitura dos trabalhos de Kessler (2001) e Costa (2008).

[2] Las paradojas de la teoría de conjuntos llevaron las pugnas filosóficas a cierto clímax, del que derivó el surgimiento de tres grandes escuelas filosóficas de la Matemática: la escuela logicista de Russell (1872-1970), la escuela formalista de Hilbert (1862-1943) y la escuela intuicionista de Brouwer (1881-1966). (Kessler, 2001, p. 237)

Segundo Mondini (2008) a escola do Logicismo tinha como meta a apresentação de uma Matemática em moldes completos, ou seja, uma Ciência pronta, em linguagem simbólica, almejando sua simplificação no que concerne sua apresentação.

Para o Logicismo, o cálculo lógico de Leibniz pôde e foi visto como uma ferramenta indispensável para formalização do pensamento dedutivo, como mencionado em Machado (2005). Bertrand A. W. Russell e Alfred N. Whitehead as duas maiores expressões da escola Logicista, em sua obra *Principia mathematica* evidenciaram sua busca na lógica a possibilidade de redução e derivação de toda a Matemática, já que a lógica, era vista como "[...] as leis fundamentais da razão, o pilar do universo" (Costa, 2008, 37).

> [...] Frege, Russell e a quase totalidade dos lógicos modernos adotam o princípio metodológico de que é possível, recorrendo-se unicamente a princípios lógicos, reduzir-se uma proposição não obviamente verdadeira a outras que assim o sejam (Machado. 2005, p. 26).

Conforme Eves (2004) e Machado (2005), as definições, proposições e demonstrações deveriam ser desenvolvidas a partir de princípios lógicos. Eves (2004, p. 677) destaca ainda que "a distinção entre a matemática e lógica passava a ser uma questão de conveniência prática".

As discussões que precederam os tempos "áureos" da escola Logicista, foram desde a Lógica normativa elementar, Lógica aristotélica até a Teoria dos Tipos de Russell. Levando em conta o contexto admitimos conveniente tomar propriedade do discurso utilizado por Eves (2004, p. 679), quando menciona que o sucesso ou fracasso dessa escola é uma questão de opinião, já que enquanto alguns consideram "[...] o programa satisfatório, outros levantam muitas objeções a ele". No entanto, podemos considerar que a escola Logicista, bem como seus estudiosos, deixaram importantes discussões no que concerne ao desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna.

A segunda corrente que ganhou destaque com seus estudos veio na contramão do pensamento Logicista, os denominados Intuicionistas[3], tinham como base de seu "edifício teórico", a construção da Matemática a partir da intuição.

A escola Intuicionista tem em Kant suas raízes, no entanto L. E. J. Brouwer pode ser considerado sua maior representação. Este, segundo Machado (2005) aceita as concepções Kantianas de proposições que não são empíricas ou sintéticas *a priori* relativas ao espaço e ao tempo. Costa (2008, p.35), evidencia que Kant considerava que, a teoria do conhecimento, se dava "no terreno dos juízos sintéticos *a priori*", o que se fazia necessário para o enriquecimento, tal como para o progresso do conhecimento.

> Os objetos do mundo sensível situam-se no contexto espaço-temporal. Para Kant, é impossível conhecê-los sensorialmente, sem uma concepção inicial, a priori, do espaço e do tempo que se daria através da sensibilidade, para Kant, fruto de uma faculdade de intuição (Costa, 2008, p. 35).

Assim a intuição, oriunda dos atos de conhecimento próprios dos estados mentais dos sujeitos, conceitos, valores e sentimentos assumiria o papel de trazer a verdade das proposições

[3] O intuicionismo foi uma das principais correntes do movimento construcionista. Os construcionistas acreditavam que todo e qualquer conhecimento deveria ser construído a partir da intuição (Mondini, 2008, p. 5).

matemáticas, não se restringindo somente à observação do que é exposto através dos sentidos no mundo externo, mas sim da razão introspectiva.

A escola Intuicionista de Brouwer assumia segundo Machado (2005), que a Matemática poderia ser construída através de métodos construtivos finitos, a partir dos números naturais, os quais são subsidiados aos sujeitos através de uma intuição fundamental.

Para os intuicionistas, toda Matemática deveria ser reconstruída, considerando que "[...] as entidades abstratas existiam somente quando eram construídas pela mente humana. Desse modo, o que não partisse da intuição não era Matemática" (Mondini, 2008, p. 5), ou seja, determinado objeto matemático só existiria caso pudesse ser efetuada sua construção.

A construção finita, proposta pelos Intuicionistas, acarretou em uma importante implicação por parte desses pensadores: a refutação do princípio do terceiro excluído, o qual segundo Morais Filho (2007, p. 28) pode ser enunciado como segue, "*uma sentença é falsa ou é verdadeira, não havendo uma terceira alternativa*". Desta forma, seria possível a construção de enunciados dotados de sentido, mas que não necessariamente fossem verdadeiro ou falso, apenas considerados logicamente, como pretendia o logicismo.

Eves (2004) faz uma importante observação, quando aponta que tal refutação se restringe para conjuntos infinitos, o que não se aplicaria para conjuntos finitos quando possível estabelecer a veracidade ou falsidade de determinada proposição, através de um número finito de passos.

Algumas teorias consideradas verdadeiras pelos matemáticos clássicos eram, do ponto de vista dos adeptos do Intuicionismo, falsas levando à dúvida e à rejeição das ideias Intuicionistas pelos matemáticos clássicos, conforme Mondini (2008).

Machado (2005, p.41) esclarece que não é passível de discussão que Brouwer de fato "[...] tocou na ferida, localizou efetivamente as raízes dos problemas que os formalistas enfrentavam ou viriam a enfrentar", já que o problema alocava-se justamente na distinção das contradições formais, no que tange o princípio do terceiro excluído, segundo o autor.

A terceira e última escola sobre a qual discorreremos traz em seu escopo as ideias dos filósofos que se sensibilizaram com as concepções Formalistas. Antes podemos aludir as breves discussões levantadas em torno das contribuições deixadas por Kant à escola Intuicionista. Os Formalistas buscaram sustentar suas primeiras ideias nas acepções de Kant, no entanto, ponderando que para ele, segundo Machado (2005), "[...] o papel que a Lógica desempenha em Matemática é o mesmo que desempenha em qualquer outro setor do conhecimento" (p.29), considerando sim que na Matemática os teoremas são sustentados por axiomas, levando-se em consideração as leis da Lógica.

Contudo, refutam a ideia proposta pelos Logicistas que esses mesmo axiomas e teoremas sejam apenas caracterizados como princípios lógicos ou decorrentes de tais princípios. Das concepções Kantianas do espaço e tempo, os formalistas acreditavam que os entes matemáticos fossem "[...] descritivos da estrutura dos dados da percepção sensível[...]"[4] (idem).

[4] Compreendemos que tal inferência pode ser compreendida como o princípio do nominalismo "[...] segundo o qual as entidades da Matemática não existem, nem como objetos reais e nem como objetos mentais. No formalismo "as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos" (Silva, 2007, p. 184). As deduções e as transformações da Matemática, ao mesmo tempo em que eram passíveis de interpretação por quem as manipulava, tinham um significado explicitado em um sistema formal que estava se constituindo (Mondini, 2008, p 6-7).

A escola Formalista teve em David Hilbert sua maior representação, esse adotou as ideias de Kant e a partir daí "inaugurou solo" sobre o qual se desenvolveria o pensamento filosófico fundamental, propondo inicialmente que:

a) a Matemática compreende descrições de objetos e construções concretas, extralógicas;

b) estas construções e esses objetos devem ser enlaçados em *teorias formais* em que a Lógica é o instrumento fundamental;

c) o trabalho do matemático deve consistir no estabelecimento de teorias formais consistentes, cada vez mais abrangentes até que se alcance a formalização completa da Matemática (Machado, 2005, p. 29).

Mondini (2008) menciona, que o objetivo primeiro do Formalismo era provar que as ideias matemáticas estavam isentas de toda e qualquer contradição, vislumbrando para isso à axiomatização da Matemática, tendo como objetivo principal livrar a Matemática dos paradoxos que assombravam os pesquisadores da época. Para este fim, os formalistas buscavam reescrever a Matemática através de demonstrações rigorosas, provas irrefutáveis em um sistema formal.

Conforme Costa (2008), Hilbert empregou as ideias de Kant para fins de extinção dos paradoxos, ele buscava a construção de "objetos" matemáticos através da lógica como instrumento fundamental, não como propunha os Logicistas que buscavam reduzir a Matemática em termos lógicos como já foi discutido. Os formalistas assumiam a lógica como método capaz de legitimar seus resultados. Buscavam também a expansão das teorias formais, no intuito de formalizar por completo toda a Matemática.

Diante das propostas e descobertas levantadas pelos Formalistas, obviamente, fervorosos embates ganhavam consistências nas academias frente às teorias alçadas pelos estudiosos. De fato a escola Formalista não passou ilesa por esses embates, segundo Machado (2005) e Mondini (2008), coube a Kurt Gödel, o papel de algoz de Hilbert, quando,

> [...] provou a impossibilidade de demonstrar a compatibilidade dos axiomas da Aritmética dentro de um sistema que inclua a Aritmética. Com isso, provou também que o projeto de Hilbert não poderia ser bem sucedido, "porque não é possível provar a consistência da Matemática dentro da própria Matemática" (Mondini, 2008, p. 7-8).

Assim, as pretensões formalistas de obter inferências legítimas de um sistema formal completo e consistente, como visionava Hilbert, não se sustentaram.

Ensino de Matemática: Influências das escolas

A partir do exposto, consideramos relevante apresentar um quadro síntese das concepções/características que consideramos primordiais sobre cada uma das escolas. Esboçando a partir de cada uma delas a compreensão de sujeito, no sentido do papel epistêmico que exerce na produção do conhecimento, e de objeto matemático no que tange o Ensino da Matemática. Ressaltamos que as ponderações, emergem de nossas interpretações sobre o material lido. Destacamos ainda a importância do quadro no sentido de facilitar a apreensão das respectivas concepções, além de promover uma melhor subdivisão para cada uma das escolas como apresentado no quadro 1. Esse quadro representa, ainda, o nosso esforço de síntese, conferindo uma discussão relativamente original sobre o assunto, que articula as escolas filosóficas ao ensino de Matemática.

Quadro 1
Síntese das características principais da escola do Logicismo e algumas considerações sobre o sujeito do conhecimento e objeto matemático[4].

Logicismo	
Concepções/Características	**Inferências**
Utiliza dos princípios da lógica	De forma geral, podemos identificar que muitos exercícios reproduzidos em salas de aulas, bem como em cursos de formação, partem de princípios lógicos, no intuído de justificar a solidez da Matemática como Ciência. Visando na lógica um "porto seguro", onde se possa justificar quase que todo questionamento a ser enfrentado na sala de aula ou fora dela. Essa visão atribui à lógica um valor de verdade imanente, independente do sujeito do conhecimento.
Demonstrar a partir das leis gerais da lógica	As demonstrações em sua grande maioria partem sempre de princípios lógicos, no entanto muitas demonstrações perdem-se dentro de seus próprios resultados; fato que pode se dar pela complexidade de seus argumentos lógicos. Os professores (sujeitos) por sua vez ou evitam demonstrações, no que diz respeito ao Ensino Fundamental ou preferem deixar que os alunos (sujeitos) explorem o "universo" matemático existente no âmbito dessa complexidade. No entanto, os alunos nem sempre são capazes de desenvolver esse papel de "explorador", e optam simplesmente por memorizar os passos necessários para mostrar a veracidade de determinado ente matemático. Ficando para um segundo, terceiro ou enésimo plano a compreensão e relação da matemática.
Toda proposição matemática pode ser expressa na termologia da lógica	Comumente podemos identificar ocorrências com essas características, tanto em livros didáticos que reduzem a acepção de termos matemáticos à lógica, como também nos cursos de formação, caso dos cursos de Matemática. Em ambos revela-se o estabelecimento de uma linguagem que se pretende pura e universal, preocupando-se quase que exclusivamente com reprodução linguística do objeto, que muitas vezes é o anseio dos professores (sujeito) nos diversos níveis de formação. Por vezes os alunos (sujeitos) encontram-se obrigados a personificar seu raciocínio em termos lógicos, para os mais diversos exercícios, como se a argumentação literal fosse um procedimento inválido no âmbito das Ciências Exatas, como se a falta de signos matemáticos invalidassem qualquer resultado e argumentação bem construída.
Enunciação de teoremas matemáticos por meio de um simbolismo lógico	A característica elencada pode ser identificada em diferentes níveis de ensino, como no Ensino Fundamental e Superior. Pode-se justificar a manifestação dessa característica pela herança matemática lógica que os livros didáticos trazem em seu escopo. E a qual os professores (sujeitos) persistem em reproduzir em sala de aula. Muitas vezes os próprios não compreendem a sobrecarga de signos dos enunciados. Quanto aos alunos (sujeitos), cabe a tarefa de interpretação e abstração das mensagens oriundas dos "códigos". E enquanto sujeitos do conhecimento, acabam sendo relegados a enunciação memorística destes teoremas.

[4] As concepções presentes nos quadros 1 ,2 e 3, são fragmentos identificados nos textos de Eves (2004), Machado (2005) e Mondini (2008).

Todos os conceitos de matemática tem que ser formulados em termos de conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática tem que ser desenvolvidos como teoremas da lógica	Percebe-se a manifestação mais intensa da escola Logicista, quanto à busca pela redução de todos os teoremas e conceitos em termos lógicos. De fato podemos pensar que a Matemática carrega intrínseca em si, muito da concepção Logicista, o que pode ser identificado em diferentes contextos, como sala de aula, material didático ou a própria explanação dos professores (sujeitos) em sala de aula, buscando argumentos lógicos no tratamento de problemas, questionamentos, desenvolvimentos de atividades. No entanto, ressaltamos que o processo criativo tanto no que concerne aos professores quanto aos alunos (sujeitos) perde espaço, tendo-se a impressão que discussões, atividades e metodologias contextualizadas, mas não de caráter estritamente lógico, não apresentassem sentido algum.

Fonte: os autores.

Na sequência passaremos à apreensão das principais características da escola Intuicionista, buscando versar sobre as concepções de sujeito do conhecimento e objeto matemático como apresentado no quadro 2.

Quadro 2
Síntese das características principais da escola do Intuicionismo e algumas considerações sobre o sujeito do conhecimento e objeto matemático.

Intuicionismo	
Concepções/Características	**Inferências**
A matemática deve ser construída a partir da intuição[5]	Consideramos que é corriqueira, em diversas situações, uma primeira interpretação intuitiva de determinado ato (uma intenção de se relacionar com o objeto), uma intuição que opera sobre o exterior (real) onde o sujeito apresenta consciência da sua relação com o objeto, onde as "entidades matemáticas" não existem por si mesmas a não ser que sejam construídas pela mente humana, ou seja, de que a existência de tal objeto é equivalente a possibilidade de sua construção. Assim o professor assume o papel de gerenciar essa relação entre a intuição e a construção de entidades matemáticas, as quais serão capazes ou não de dar conta de determinado problema matemático por exemplo, podemos inclusive identificar uma relação entre lógica e intuição que se manifesta no pensamento estabelecendo relações que visam a veracidade dos argumentos transposto para realidade. Paralelamente a responsabilidade docente, tem-se a impressão que os alunos deixam de realizar essa interpretação intuitiva primeira, passando a aplicações imediatistas quando defrontados com atividades matemáticas que exijam reflexões mais profundas.
Encarrega a intuição resultante da introspecção de evidenciar a verdade das proposições matemáticas	Tudo que está a nossa volta, mesmo que inconscientemente, contribui de certa forma para a constituição do sujeito no mundo, além de considerar que o conhecimento que adquirimos das experiências que temos no dia a dia são fundamentais para as relações que estabelecemos durante a vida. Entretanto as relações que desenvolvemos, os atos primeiros que tomamos, ganham sentido e se fazem coerentes em um "plano" diferente do real, a intuição introspectiva daria conta de administrar tudo isso, já que procedemos uma auto reflexão dos valores, dos conceitos dos sentimentos que manifestamos. A Matemática também pode ser administrada nesse ambiente, ganhando forma e sentido, visando uma construção para o real do que antes foi intuitivo.

[5] O termo – intuição – pode ter múltiplas interpretações, dependendo do contexto, no intuito de clarificar essa acepção sugerimos ver Japiassú e Marcondes (2001) e Meneghetti, (2009). Ressaltamos ainda que, – intuição – para os intuicionistas tem significado distinto do senso comum.

Renuncia a lei do terceiro excluído de que uma proposição ou é falsa ou é verdadeira	A suposição de que uma proposição matemática é necessariamente verdadeira ou falsa é quase que dogmática no que se refere ao ensino da Matemática. No entanto, o princípio Intuicionista admitia a negação de tal fato, levando-se em consideração que enunciados poderiam ser construídos, desde que dotados de sentido, não levando-se em conta a lei do terceiro excluído, tão pouco a lei da não contradição, ou seja sendo possível que estes fossem verdadeiros e falsos ao mesmo tempo. No que tange o ensino da Matemática, podemos considerar que muitos alunos (sujeitos) mal conseguem estabelecer relação dos fundamentos desses princípios com os resultados que buscam em suas resoluções, isso quando compreendem ou sabem que tais leis existem, fato esse que não é restrito a Educação Básica. Cabendo ao professor (sujeito), identificar "sentido" nas resoluções muitas vezes propostas de forma mecânica e sem significado.
Para provar a existência de uma entidade é preciso mostrar que ela é construtível em um número finito de passos	Fazendo alusão aos diversos argumentos que utilizamos quando buscamos "atacar" determinado problema, ou seja, buscamos estudar uma forma eficiente para sua resolução, estudo que se manifesta muitas vezes, intuitivamente, na sequência buscamos a elucidação de nossas ideias (sujeitos professor/aluno). No caso de atividades matemáticas, uma demonstração, por exemplo, buscamos a apresentação das resolução quase que de forma descritiva, visando deixar claro cada passo tomado, cada argumento levantado na resolução, característica essa que muitas vezes herdamos dos cursos de formação ou das escolas do Ensino Básico.

Fonte: os autores

Por fim, passamos as considerações referentes a última escola filosófica, o Formalismo, a qual, assim como para as anteriores, descreveremos no quadro 3.

Quadro 3
Síntese das características principais da escola do Formalismo e algumas considerações sobre o sujeito e objeto matemático.

Formalismo	
Concepções/Características	**Inferências**
As ideias matemáticas são isentas de contradições	Essa concepção está fortemente enraizada no pensamento do homem. Esse fato pode se dar pela concepção que fomos levados (enquanto alunos) a acreditar, comumente escutamos frases como - "a matemática é uma Ciência Exata" - no sentido mais amplo da palavra, perfeita, inexorável, incapaz de cometer erros, apresentando um universo seguro para aqueles que a dominam com brilhantismo. No entanto, o ensino da Matemática está muito além dos discursos perfeccionistas de alguns professores (sujeitos), carrega consigo a responsabilidade de formar pensadores críticos que sejam capazes de transitar entre o brilhantismo e a opacidade, vendo significados nos erros. No entanto, isentá-la de toda e qualquer contradição é inapropriado do ponto de vista da construção do objeto matemático. O objeto matemático ser estável não quer dizer que a construção das ideias sobre ele também o seja.

Reescreve a matemática através de demonstrações rigorosas em um sistema formal	A Matemática é carregada no interior de sua história com anedotas que provocaram verdadeiros alvoroços na comunidade que outrora promoveu seu desenvolvimento. Isso tudo se dava pela busca da hegemonia dos sistemas formais, pela solidez do pensamento matemático. Os processos de demonstrações são de fato tidos como essenciais, principalmente quando se fala no âmbito dos cursos de Nível Superior, em que o desenvolvimento lógico, a articulação do pensamento matemático e a precisão na utilização dos objetos matemáticos devem estar em razoável sintonia. Para alguns professores (sujeitos) têm-se um bom acadêmico, (seja de um curso de Licenciatura seja de Bacharelado), quando este sabe demonstrar com primazia, independendo se o aluno estabelece relações de sentido no que se demonstra, se o aluno de fato compreende o que está fazendo. É comum encontrarmos professores que "treinam" seus alunos como quem treina um atleta para determinada tarefa, os exercícios são jogados aos montes para os alunos e esses devem reproduzir quase que de forma instantânea os procedimentos de resolução, uma forma de "receita de bolo", comum em cursos pré-vestibulares por exemplo. No entanto essa amarra imposta tolhe a capacidade intelectual do aluno de argumentar, de levantar hipóteses, de aprender com os próprios erros de admitir outras formas de expressão da Matemática. A transposição imediata deste princípio para o ensino mutila, tanto a compreensão do objeto matemático, como do sujeito do conhecimento.
Conjunto de regras e símbolos que permitem operar mecanicamente Estudo dos sistemas simbólicos formais	A Matemática traz em si uma excessiva diversidade de signos, dos quais muitas vezes os alunos não fazem ideia de como utilizá-los ou se quer o significado de determinado símbolo. Para tanto, vislumbra-se um estudo formal dos símbolos, logo nos primeiros contatos que o aluno estabelece com a Matemática, devem ser apresentados as diferentes ferramentas que serão necessárias para o bom desenvolvimento do aluno (sujeito) durante sua carreira acadêmica. Alguns exercícios trazem enunciados tão complexos que aparentam tomar características de uma nova linguagem (o que de fato é), da qual os alunos se mostram, muitas vezes, incapazes de compreender, quanto mais operar com tal simbologia. Diante do exposto, ponderamos a árdua tarefa do professor (sujeito) de explicar, clarificando o amontoado simbólico que os alunos precisarão dominar para compreender o mínimo da Matemática que os rodeia. No entanto salvo aqueles que fazem jus aos aprendizados, temos os alunos que não estabelecem significados aos diferentes elementos apresentados, para estes restam a "didática da boa memória," provando serem capazes de reproduzir resultados e demonstração com primazia, ainda que não estabeleçam sentido e compreensão alguma do que demonstrou ou resolveu, reduzindo-se a um aprendizado mecânico em que o objeto matemático não lhe atribui sentido algum.
Estabelecer teorias formais consistentes cada vez mais abrangentes até alcançar a formalização total da matemática	A escola (levando-se em conta os diferentes níveis de ensino Escola Básica/Ensino Superior) como formadora, espera que os professores (sujeitos) sejam capazes de construir o arcabouço teórico de seus alunos (sujeitos) e que estes alunos consigam sistematizar a Matemática, vislumbrando uma articulação tão sólida capaz de dar conta de todo e qualquer problema, não dando margem para possíveis paradoxos dentro da Matemática.

Fonte: os autores.

Frente ao exposto podemos ter uma melhor compreensão das escolas do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo no âmbito da Matemática, bem como compreender a manifestação destas sobre o Ensino de Matemática.

Algumas considerações

O desenvolvimento da Matemática como ciência se deu por diversas contribuições, tal como o desenvolvimento de outras Ciências. A Matemática, como apresentado no decorrer do

texto, deve sua engenhosidade a três grandes escolas: Logicista, Intuicionista e Formalista, que refletem seus estudos nos diversos campos em que se ramifica a Matemática, como a Pura, Aplicada e Educação Matemática. A partir desse interesse primeiro de compreender como se deu esse desenvolvimento, e dando ênfase ao que pode se revelar no que tange ao Ensino de Matemática, subsidiamos nossas ponderações apoiados na pergunta diretriz "*Quais as implicações das escolas do Formalismo, Intuicionismo e Logicismo no ensino de Matemática?*" assim pudemos compreender quais as concepções constituintes em cada escola. Resumidamente revelou-se o que apresentamos do quadro 4.

Quadro 4
Concepções das escolas do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo.

Escola Filosófica	**Concepção**
Logicismo	Reduzir a Matemática em termos lógicos, propondo, demonstrar analiticidade de determinada proposição a partir das leis gerais da lógica.
Intuicionismo	A Matemática deve ser sistematizada partindo sempre da intuição. Para tanto utiliza-se de um número finito de passos, a partir dos números naturais, "métodos construtivos", dados intuitivamente.
Formalismo	Formalizar toda a Matemática Clássica em um sistema formal consistente e completo, utilizando demonstrações procedendo a axiomatização de toda Matemática.

Fonte: os autores.

Foi possível identificar características, próprias em cada escola, como apresentado no decorrer do texto, cada uma com sua particularidade e que de certa forma se entrelaçam no contexto da Educação Matemática. Assim podemos considerar que, por exemplo, a primeira escola que apreciamos, a Logicista, atribui a fatores extra-temporais a existência da Matemática. A Intuicionista, por sua vez, atribui ao sujeito que conhece, já a escola Formalista pode ser compreendida como uma posição intermediária entre as outras duas. Essa é uma leitura interessante de se fazer ao pensar a "natureza" do conhecimento científico.

No entanto, quando estabelecemos relações com o ensino, podemos destacar características que transitam em um ambiente de coexistência. Esse ambiente se dá, quando pensamos, por exemplo, no desenvolvimento de uma demonstração, uma vez que podemos assumir contribuições deixadas pelas três escolas, como uma intuição primeira quando acreditamos que algo é passível de construção, visando traçar estratégias para desenvolver o pensamento lógico, os procedimentos lógicos, axiomas e resultados já demonstrados dos quais utilizaremos para mostrar a veracidade de determinado objeto, bem como a formalização através de princípios lógicos e escrita formal. Todavia não podemos generalizar que toda demonstração se desenvolva dessa forma. Poderíamos apresentar diversos enunciados de exercícios, bem como suas resoluções que acabam por tomar propriedade de conceitos de uma ou mais escola, no entanto tais apresentações não se fazem necessárias em nosso entendimento, visto que nosso objetivo foi a compreensão das implicações dessas diferentes filosofias no ensino da Matemática.

As discussões fomentadas no que tange as características e concepções, a partir das três escolas filosóficas, manifestam-se de diferentes formas no ensino da Matemática, como por exemplo, as abordagens de determinados conteúdos matemáticos, a postura docente diante dos enfrentamentos das salas de aula (diversas situações que podem ocorrer como, questionamentos, dúvidas, argumentações, explicações, metodologias adotadas pelos professores entre outros), a apresentação de determinados exercícios pelos professores e livros didáticos, ou o que as instituições de ensino almejam de seu corpo docente e discente. Assim compreendemos que o

pensar pedagógico, no que se refere às práticas docentes em todos os níveis de ensino, carecem de reflexão. A compreensão – mesmo que básica – a respeito de cada uma das escolas e de suas doutrinas se faz necessária, pois entendemos que tal conhecimento promove uma seguridade ao fazer prático do profissional.

Por fim, podemos considerar que a Matemática se constituiu da contribuição de diversos pensadores, que com seus estudos idealizaram uma Ciência capaz de responder uma diversidade de problemas, além de subsidiar outras Ciências. Destacamos, no entanto, que a interpretação de perfeição ou não da Matemática, bem como sua exatidão cabe ao sujeito que a estuda. O que podemos considerar é que a Matemática, como a conhecemos hoje, emerge das contribuições deixadas outrora pelo modo de pensar dos filósofos e pelas reestruturações internas da Ciência Matemática. E que o ensino de Matemática não é isento. As contribuições destas escolas, no âmbito da Matemática, podem se constituir em entraves às perspectivas do Ensino de Matemática. Por isso, uma avaliação crítica das escolas se faz necessária.

Referências e bibliografia

Bicudo, M. A. V. (2011). *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica.* São Paulo: Cortez.

Boyer, C. B. (2010). *História da Matemática* (Prefácio de Isaac Asimov revista por Uta C. Merzbach. Tradução: Elza F. Gomide, 3ª ed.). São Paulo:Blücher.

Costa, C. F. da. (2008). *Por que resolver problemas na educação matemática? Uma contribuição da escola de Gestalt* (Tese de Doutorado). 220 f. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Garnica, A. V. M. (1997). *Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia.* Interface – comunic, saúde, educ. 1. Agosto de 1997.

Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (5ª ed.). São Paulo: Atlas.

Japiassú, H., & Marcondes, D. (2001). *Dicionário básico de filosofia* (3ª ed.). Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Kessler, W. O. B. (2001). *Algunos aspectos epistemológicos de da matemática:* ¿Es la matemática un lenguaje? *Educere, 5*(14), 236-240. Universidad de los Andes Venezuela, jul-set.

Klüber, T. E.; Burak, D. (2008). *Concepções de modelagem matemática:* contribuições teóricas. *Educação, Matemática, Pesquisa, 10*(1), 17-34. São Paulo

Machado, N. J. (2005). *Matemática e realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática* (6ª ed.). São Paulo: Cortez.

Meneghetti, R. C. (2009). *O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático*: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Bolema, 22*(32), 161 – 188. Rio Claro – SP,

Mondini, F. (2008). O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemáitca. In *XII EBRAPEM*, 2008, Rio Claro. Anais do XII Ebrapem.

Morais Filho, D. C. de. (2007). *Um convite à matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades* (2ª ed.). Campina Grande, EDUFCG.

Santos, B. de S.(1989). *Introdução a uma ciência pós – moderna*. Rio de Janeiro: Graal.

Tambarussi, C. M., & Klüber, T. E. (2014). *Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. Educ. Matem. Pesq., 16*(1), 209-225. São Paulo.

As reformas pombalinas da instrução pública e o ensino de Matemática

Fabiane **Mondini**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
fabiane.mondini@feg.unesp.br
Maria Aparecida Viggiani **Bicudo**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
mariabicudo@gmail.com

Resumo

O objetivo dessa pesquisa é compreender a orientação dada ao ensino de Matemática, pela reforma pombalina de 1772, que modifica os estatutos da Universidade de Coimbra, em Portugal. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, desenvolvida numa abordagem fenomenológica, que discute a reforma situada no movimento sócio-histórico-político em que ela ocorreu, ou seja, abordamos as mudanças que ela promoveu, durante o período em que ela foi produzida e oficializada, bem como, sua influência na educação, principalmente no que diz respeito a Matemática. Pois o documento eleva a Matemática ao patamar de curso de nível superior e a transforma em base para as outras ciências.

Palavras chave: história da educação brasileira, matemática, fenomenologia, hermenêutica, reformas pombalinas.

Introdução

Apresentamos neste texto parte de uma pesquisa concluída, cujo título é "A Presença da Álgebra na Legislação Escolar Brasileira" (Mondini, 2013), que teve por objetivo compreender o modo como a Álgebra está organizada pela legislação, nos períodos jesuítico, colonial, imperial e republicano. Nesse texto, expomos uma discussão a respeito da reforma da Universidade de Coimbra de 1772, durante o período colonial, que transforma a Matemática em um curso de nível superior em Portugal e em suas colônias, incluindo desse modo o Brasil.

A pesquisa e seus procedimentos

A pesquisa apresentada neste texto é desenvolvida qualitativamente, seguindo uma postura fenomenológica na execução de seus procedimentos. Fenomenologia é uma palavra composta pelos termos "fenômeno" mais "logos". Fenômeno diz do que se mostra na intuição ou percepção e logos diz do articulado nos atos da consciência em cujo processo organizador a

linguagem está presente, tanto como estrutura, quanto como possibilidade de comunicação e, em consequência, de retenção em produtos culturais postos a disposição no mundo-vida[1] .

Assim, não partimos de métodos prévios e nem de referenciais teóricos predeterminados para o desenvolvimento do trabalho, mas iniciamos com o fenômeno (As reformas pombalinas da Instrução Pública), tal qual ele se mostra a nós, nos documentos e textos que retratam a época referida. A meta desta pesquisa é compreender a orientação dada ao ensino de Matemática, pela reforma pombalina de 1772, documento que eleva essa Ciência ao nível de Ensino Superior.

Com a clareza do objetivo iniciamos o estudo do fenômeno. Nesse caso, a reforma universitária de 1772. Para compreender a reforma é preciso também conhecer a historicidade em que ela se contextualizou, ou seja, o movimento sócio-histórico-político em que ela ocorreu e as mudanças que ela promoveu. Desse modo, estudamos o período em que ela foi produzida e oficializada e a sua influencia na educação brasileira.

Posteriormente ao estudo do contexto gerador do alvará pombalino tratado nesse texto, iniciamos nossos procedimentos de estudo e análise do documento. O primeiro passo dado foi à leitura atenta orientada pela pergunta 'o que o texto diz?'. Num segundo momento, destacamos, no texto da reforma universitária, os trechos que, em nossa perspectiva, condizem com o objetivo do trabalho.

Esses trechos possibilitam a abertura de significados possíveis na perspectiva da interrogação norteadora; nós os denominamos de 'Unidades de Significados', por serem significativas ao pesquisador que tem como pano de fundo a totalidade de onde elas foram destacadas, ou seja, o pesquisador está situado no solo da intersecção de sua historicidade pessoal e do tema investigado. Para expor esse movimento de pesquisa, elaboramos o quadro I, que traz o compreendido, ou o pensar reflexivo mediante o estudo realizado.

O pensar reflexivo é proveniente do esforço de voltarmos à análise hermenêutica que realizamos, visando o sentido que o texto faz para nós e para o campo do tema investigado, bem como, para o próprio tema. Encaminha-nos para a "metacompreensão de toda trajetória e do que foi se clareando para nós em termos do interrogado, olhado nas preocupações da região de inquérito em que a pesquisa se insere", de modo a intencionalmente transcender para convergências mais abrangentes (Bicudo, 2011), enredadas "em um solo teórico que sustenta a análise, não como algo onde o pesquisador possa se fundamentar, mas como horizonte de compreensão e de interpretação que faz sentido para nós [pesquisadoras] em sintonia à pergunta formulada," possibilitando, desse modo, o que a autora denomina de "análise criativa". Por último, elaboramos uma Síntese da Reforma Universitária de 1772.

As reformas pombalinas e as mudanças educacionais

As reformas pombalinas da instrução pública, como são denominadas, têm por objetivo a substituição dos métodos considerados tradicionais do ensino Jesuíta da época por outros mais adequados aos ideais iluministas. As mudanças são acompanhadas de transformações

[1] Segundo Bicudo (2011, p. 30) "mundo-vida ou mundo da vida é entendido como espacialidade (modos de sermos no espaço) e temporalidade (modos de sermos no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como, com todas as explicitações científicas, religiosas e de outras áreas de atividade e de conhecimento humano".

econômicas, políticas e religiosas e pelo pensamento do iluminismo que, nessa época, já havia se difundido também em Portugal.

Com a intenção de modernizar o Estado português, são elaboradas de modo a revolucionar o ensino e com o objetivo de mudar o pensar de uma cultura. São mais que mudanças na proposta político-pedagógica até então existente; visam a uma modificação de postura, não só no ensino, mas na filosofia da época e na política social.

O método pedagógico jesuítico, fortemente enraizado na tradição escolar portuguesa, passa a ser considerado inadequado e desatualizado ao momento histórico em que a sociedade se encontrava. Por um lado, os Jesuítas procuram manter a todo custo seus métodos de ensino e seus autores, evitando a introdução de textos novos, muitas vezes, por ele considerados inapropriados ao ensino, à religião e aos objetivos da Companhia. Mas, o ideal iluminista se torna cada vez mais presente ao poder junto ao Estado, opondo-se aos velhos métodos.

Além das críticas de diversos setores sociais direcionadas aos métodos dos Jesuítas, outras ordens religiosas também começam a questionar esse modo de ensinar. Nesse sentido, destacam-se os oratorianos[2], que valorizavam as Ciências Naturais. Sua pedagogia era fundamentada em autores como Bacon, Descartes e Locke. Foram eles os responsáveis por introduzir, em Portugal as experimentações científicas, por exemplo.

Contrários às concepções dos Jesuítas, os oratorianos criticam o ensino proferido em latim, considerando-o desnecessário. Entendiam que a língua materna era mais eficaz à aprendizagem, bem como, ao conhecimento da própria Ciência. Afirmam que o modo de pensar dos Jesuítas é retrógrado no que se refere à organização do ensino e abusivo nas questões religiosas, ditando as leis da ordem como se fossem as leis da Igreja e, por possuir uma filosofia fundamentada na obediência e na humildade, considerados modos de alienar as pessoas. Juntamente com os iluministas e burgueses fizeram parte do movimento antijesuitismo, que se alastrou por Portugal.

Nessa época, também, Luis Antonio Verney[3], por meio inúmeras cartas, critica e aponta falhas no método pedagógico dos Jesuítas e na gramática latina elaborada por eles. Suas cartas influenciaram fortemente as reformas que futuramente seriam propostas pelo Marquês de Pombal, já que suas sugestões foram acatadas nas reformas pombalinas (Carvalho, 1978).

Em função de tudo o que estava acontecendo, o Marquês de Pombal, por meio de uma comissão, ordenou que fosse elaborado um estudo sobre o ensino em Portugal. O relatório mostra a decadência da nação portuguesa e culpa a obra da companhia de Jesus por isso, além de descrever os problemas causados pela ordem religiosa às quatro Ciências: Teologia, Leis e Cânones, Medicina e Matemática (Carvalho, 1978).

Por meio do documento, a comissão critica a adoção: da filosofia ontológica aristotélica e do esquecimento da Teologia primitiva na Teologia dos Jesuítas; de uma metafísica errônea e prejudicial na Jurisprudência Canônica e Civil; da ética de Aristóteles, filósofo ateísta, que não tinha crença em Deus e na vida eterna para o ensino da moral cristã. Critica, na medicina, a obstinada adesão à física aristotélica, confunde método teórico com o prático, sendo que este

[2] A Confederação do Oratório, ou oratorianos, ou Ordem São Francisco Néri é uma ordem religiosa que se dedica a educação cristã da juventude e a obras de caridade.

[3] Estudou na congregação dos oratorianos e era adepto ao iluminismo. Escreveu 16 cartas anônimas para a corte, hoje reunidas sob o título: "O verdadeiro método de estudar para ser útil à República, e à Igreja: proporcionado ao estilo, e necessidade de Portugal", criticando o ensino jesuíta.

último era quase inexistente e a não valorização da Matemática como fundamento para a Ciência (Carvalho, 1978).

O relatório também critica fortemente os padres da Companhia de Jesus, dizendo que não há Jesuítas portugueses ou espanhóis "porque são na realidade os mesmos Jesuítas, que não conhecem outro soberano que não seja o seu geral, outra nação que não seja a sua própria sociedade, porque pela profissão ficam logo desnaturalizados da pátria, dos pais e dos parentes." (Carvalho, 1978, p.44). Reforça também que, naquele momento, a terceira parte de Portugal pertencia à Igreja. Eram inúmeros homens e terras inúteis ao comércio, à indústria e aos interesses do Império. A igreja não respondia pelas despesas do país, não formava homens para o exército e para as diferentes funções importantes à sociedade. Mudanças eram necessárias. Como conclusão da investigação é apresentada a necessidade do Estado de tomar as rédeas para formar homens de acordo com o seu interesse e suas necessidades.

Todo esse movimento culmina com o Alvará de 28 de junho de 1759, quando o governo português assume a educação para si, expulsa os Jesuítas de Portugal e de todas as suas colônias e reorganiza o ensino português. No Brasil, no momento da expulsão, os Jesuítas eram responsáveis pela educação da maioria da população que tinha acesso à escola. Só do Brasil saem cerca de 500 padres Jesuítas, expulsos pelo Marquês de Pombal, paralisando 17 colégios, 36 missões, seminários menores e escolas elementares (Mondini, 2013).

Ao assumir a responsabilidade pela educação, o Estado procura estabelecer uma nova estrutura com outros objetivos e outros fins. Concebe que a formação deveria visar à Ciência, com o objetivo de modernizar e fazer progredir o país. Há, nesse momento, uma tentativa de implantar uma nova pedagogia fundamentada na filosofia moderna, substituindo a filosofia escolástica e dá-se início a uma nova concepção de Educação.

Com a expulsão dos Jesuítas de Portugal e de todas as suas colônias e com a chegada à Europa de uma nova filosofia empírica e cética, começa-se a modificar o ensino, principalmente o de Física, que tem o método teórico, aos poucos, substituído pelo prático. O ensino de Física em Portugal começa, então, a ser efetuado por meio da experiência nos colégios dos oratorianos, adepto de modernidades.

Ao mesmo tempo em que a educação inicia um processo de mudança, há revolta de grande parte da população, principalmente daquela dos pobres. Pois, para o filho de um não nobre, o único caminho para a nobreza era o do ensino e da religião. E os Jesuítas deram a muitos pobres o *status* de terem filhos nobres. Com a expulsão dos Jesuítas, as escolas são fechadas e não são reabertas pelo Estado, que começa a receber uma onda de críticas ao governo, por falta desse tipo de instituição.

Os alvarás régios das reformas pombalinas vêm com o objetivo de sanar esses problemas educacionais e adequar o ensino às novas concepções. Um dos primeiros, por exemplo, ordena que no subúrbio de Lisboa, no colégio de Nossa Senhora das Necessidades, o latim, o grego, a retórica e todas as humanidades seriam ensinados pelos padres da Congregação São Felipe Nery, que possuíam métodos pedagógicos diferentes daqueles dos Jesuítas e eram considerados mais adequados à modernidade. Posteriormente, esse método se estende aos demais colégios de ensino menores, como eram chamadas as instituições que se dedicavam a instrução básica. Toda a sucessão de alvarás que ocorre nos anos seguintes (de 1759 até 1772) são "um esforço de renovação de métodos e de atitudes de pensamento e de integração de novos ideais, esforço este

que não disfarça os propósitos "iluministas" que animaram estas iniciativas e reformas" (Carvalho, 1978, p.26).

A reforma universitária de 1772

No dia 28 de agosto de 1772, o rei assina um alvará régio, dando ao Marquês de Pombal plenos poderes para a reorganização da Universidade de Coimbra. O Marquês de Pombal inicia então uma reforma que modifica profundamente o ensino superior português, marcando o auge do pombalismo em Portugal. Cabe ao Estado o poder de formar o sacerdote, o advogado, o médico, o cientista de acordo com seus interesses e suas necessidades, sendo de competência do rei de interferir e decidir inclusive nas questões religiosas.

Com as mudanças, o governo português impõe outra lógica ao ensino superior, por meio da implementação da Teoria Newtoniana, substituindo o pensamento cartesiano pelo de Newton. O método científico deixa de ser apenas dedutivo e observacional e passa a ser composto também pela análise fundamentada no rigor matemático. O método científico de Isaac Newton não formula uma metodologia, mas cria uma síntese metodológica, "incorporando o empirismo indutivo de Bacon, o racionalismo matemático dedutivo de Descartes e o método científico experimental de Galileu" (Rosa, 2010, p. 58).

A teoria de Newton "não começa colocando determinados princípios, determinados conceitos gerais para abrir caminho, gradualmente, deles partindo, por intermédio de deduções abstratas, até o conhecimento do particular, do fático; seu pensamento se move na direção oposta. Os fenômenos são o dado e os princípios o inquirido". (Cassier, 1950 apud Carvalho, 1978, p. 53).

Desse modo, a principal mudança da reforma de 1772 ocorre no curso de Matemática, que antes da reforma era um pré-requisito ao estudo de Filosofia e, posteriormente ao decreto passa a ser. Nas escolas jesuítas o estudo dessas disciplinas tinha como objetivo preparar o intelecto do aluno para a Teologia. Com a reforma, a Filosofia e a Matemática se transformam em fundamentos da Ciência. Para explicitar a reorganização promovida pela reforma pombalina da Instrução Pública 1772 elaboramos o quadro I, que retrata a organização dos cursos de ensino superior de Portugal nesse período.

O quadro I, exposto na sequência desse texto, apresenta uma síntese compreensiva pautada nos estudos que fizemos das reformas pombalinas da Instrução Pública. Na reforma universitária de 1772, a Matemática compõe o quadro de cursos de Ensino Superior, pela primeira vez, na história da educação portuguesa.

Quadro 1:
Os cursos superiores segundo os estatutos da Universidade de Coimbra de 1772:

	Teologia	**Cursos Jurídicos Canônico e Civil**	**Medicina**	**Filosofia**	**Matemática**
Duração	5 anos	5 anos (3 a menos do que era exigido antes da reforma)	5 anos	4 anos	4 anos
Compo-sição	O curso muda de 4 cátedras e 3 catedrilhas para 8 cadeiras, sendo 4 *pequenas*	Com a reforma, ficam estabelecidas 8 cadeiras para a Faculdade Civil (História Civil e dos Povos, Direito	Antes da reforma o curso médico era composto de 6 cadeiras (A de *prima* por 6 anos do curso; a de	Antes da reforma este curso era dedicado a formação do Teólogo e	Possui 4 cadeiras: Matemáticas Puras (Geometria Plana, Aritmética, Álgebra até as equações de 2º grau e

	cadeiras (1 de história eclesiásticas, 3 de teologia dogmática-polêmica) e 4 grandes cadeiras (1 de teologia moral, 1 de teologia litúrgica e 2 de escrituras para estudo do antigo e do novo testamento).	Romano e Português, duas de Elementos do Direito Civil, três disciplinas sintéticas (2 de Direito Romano e 1 de Direito Pátrio) e duas analíticas (Direito Civil Romano e Direito Pátrio)) e 7 para a Canônica (História da Igreja Universal e Portuguesa, uma elementar de Instituição do Direito Canônico, 3 sintéticas uma de decreto de Graciano e duas Decretais) e duas analíticas de Direito Canônico. Havia ainda a cadeira de "direito natural, público, universal e das gentes" comum aos dois cursos. As analíticas eram consideradas tradicionalmente as Grandes Cadeiras, enquanto as demais eram as pequenas cadeiras.	Véspera, Avicena e Nôa*, 5 anos e, por último; 2 catedrilhas, 5 anos).* Com a reforma fica com 6 cátedras: 1ª de Matérias Médicas; 2ª de Anatomia, Operações Cirúrgicas e Arte Obstetrícia; 3ª Instituições Médico Cirúrgicas; 4ª Aforismos; 5ª e 6ª Prática de cirurgia e de medicina.	seguia o programa proposto pelos Jesuítas. Com a reforma, o curso continuou como pré-requisito para os demais cursos e ganhou caráter superior. O curso é composto por 4 cadeiras na seguinte ordem: Filosofia Racional e Moral, História Natural, Física Experimental, Química Teórica e Prática.	Trigonometria), Cálculo, Ciências Físicas-Matemáticas e Astronomia.
Idade para ingressar no curso	18 anos	16 anos	18 anos, mas com os estudos obrigatórios já feitos, inclusive os 3 anos dos cursos de Filosofia e Matemática.	14 anos	14 anos
Pré-requisitos	Certificados que comprovassem preparação suficiente em latim, retórica, disciplinas filosóficas, metafísica e ética.	Formação propedêutica em latim, retórica, lógica, metafísica e ética. Certificados de estudo de grego. Os alunos vindos de cidades que não tinham professores de grego poderiam	Conhecimento em Latim, Grego, Filosofia e Matemática (Filosofia Moral, Filosofia Racional e Física). Deveria frequentar antes 3 anos os cursos	Curso completo de humanidades e Grego. Ter um histórico de bom comportamento nos cursos feitos anteriormente.	Curso completo de humanidades e conhecimento da língua latina, Filosofia Moral e Racional. É recomendado, não obrigado, que o aluno saiba Inglês e Francês.

	Os alunos vindos de cidades que não tinham professores de grego e hebraico poderiam cursar estas disciplinas concomitantes com o curso universitário em Coimbra.	cursar esta disciplina concomitantes com o curso universitário em Coimbra.	de Filosofia e Matemática para estudar Geometria, História Natural, Física, Mecânica e Química. É recomendado, não em caráter obrigatório, o estudo de Francês e Inglês.	Ser seguidor de bons costumes sociais.	O primeiro ano deveria frequentar as aulas de Filosofia Racional e Moral e História Natural. No segundo ano deveria frequentar as disciplinas de Física Experimental. Sua matrícula só era feita a partir do 3º ano.
Disciplinas no 1º ano	História Sagrada e Eclesiástica, História literária da Teologia, Disciplina de método e Lugares Teológicos.	Direito Natural, História Civil e das Nações, Leis Romanas e Portuguesas, Doutrina do Método do estudo jurídico e uma notícia literária da jurisprudência Civil. Por último, Elementos do Direito civil em cadeiras complementares. Estas disciplinas são comuns ao primeiro ano dos dois curso.	1ª cátedra	Filosofia Racional e Moral	Geometria: Elementos de Euclides.
Disciplinas no 2º ano	Repetiam-se as disciplinas do ano anterior. Estudava-se ainda Teologia Teorética ou Dogmática e simbólica-polêmica,	Análise de elementos da História Universal e Portuguesa, Direito Canônico comum e Português Além disso, estudavam as Instituições do Direito Canônico, Doutrina do Método de Estudo e uma notícia referente a jurisprudência Canônica. Para os Canônicos continua o estudo de Direito Natural iniciado no ano anterior.	2ª cátedra	História Natural Os estudantes artistas deveriam cursar no segundo ano a disciplina de Geometria Elementar junto ao curso de Matemática.	Cálculo: Análise Infinitesimal e Integral pelo Compêndio de Bezout.
Disciplinas no 3º ano	Teologia Mística e Teologia Prática ou Moral.	Para os civis: estudo das leis de Direito Civil Romano pelo método sintético. Para os Cânones: Direito Canônico Público e o Decreto de Graciano.	3ª cátedra	Física Experimental,	Mecânica de Marie: Ciências Físicas e Matemáticas (Mecânica e Óptica, em todos os seus ramos).

Disciplinas no 4º ano	Teologia Canônica ou Direito Púbico Eclesiástico, Instituições do Direito Canônico e Teologia Litúrgica.	Continuação dos estudos do ano anterior. Para os Cânones havia o complemento com o estudo do Decreto e das análises decretais de Gregório IX.	4 cátedra	Química Teórica e Prática	Pelo Compêndio de Lacaille, estudavam Astronomia.
Disciplinas do 5º ano.	Teologia Exegética do Antigo e do Novo Testamento.	Método sintético do direito civil pátrio, interpretação e aplicação das leis aos fatos por meio do método analítico.[4] (fundamentado em Kant)	5ª e 6ª cátedras e prática de hospital.		

Na continuidade do texto apresentamos nossa compreensão sobre o Alvará de 1772, que promove mudanças no Estatuto da Universidade de Coimbra e transforma o curso de Matemática em um curso de nível superior. Com a Reforma a Matemática ganha espaço enquanto Ciência e especificidade enquanto disciplina a ser trabalhada como tal no ensino superior.

A matemática e a reforma universitária de 1772

A reforma universitária de 1772, diferentemente das outras que se tornam públicas por Alvarás, ocorre por meio da mudança de estatutos da Universidade de Coimbra. Uma das principais mudanças dessa reforma se dá em relação ao curso de Matemática, que passa de pré-requisito para a Filosofia para um curso de ensino superior. Esse curso se diferencia dos demais por receber dois tipos de estudantes: Os ordinários e os obrigados. Os primeiros frequentavam o curso para conhecer do que se tratava e adquirir conhecimento ou para futuramente ingressar em outro curso universitário, já que este é pré-requisito para alguns dos demais cursos, conforme exposto no quadro I. Os alunos obrigados são os estudantes que devem fazer ou todo o curso ou parte dele, conforme seja necessário para a sua formação. Há também os alunos voluntários, que são os 'incapazes' de dedicar-se a uma faculdade, mas, devido a sua posição social necessitavam de instrução e frequentam o curso "por curiosidade, em qualquer das partes dela, para ornamento

[4] Os termos sintético e analítico dizem das intenções pedagógicas de cada disciplina. O estudo sintético "partia das definições, passaria o professor à divisão das matérias, até indicar os 'primeiros princípios e preceitos gerais mais simples e mais fáceis de se entenderem', deduzindo depois 'as conclusões mais particulares, formada da combinação de maior número de ideias'. O método sintético é ainda denominado, nos Estatutos, *compendiário* e *demonstrativo.* Compendiário, na medida em que os professores devem evitar o ensino da Jurisprudência por *sistemas amplos* e *difusos* e demonstrativos pela ordem *científica* a que os professores devem obedecer na distribuição das matérias no cursos. Completados os estudos de Jurisprudência pelo método sintético, [...] passariam para o método analítico, método este destinado a exercitar os estudantes na aplicação dos conhecimentos adquiridos nos anos anteriores e nos segredos da interpretação justa dos textos jurídicos, pois 'a análise dos textos, enquanto se achou destituídas dos verdadeiros princípios e subsídios, foi o que brotou as falsas inteligências dos glosadores, que corromperam a certeza do direito'". (Carvalho, 1978, p.163-164).

de seu espírito, como muito convém a todas as classes de pessoas e principalmente à nobreza". (Carvalho, 1978, p.169).

> tem as Mathematicas huma perfeição tão indisputável entre todos os conhecimentos naturaes, affim na exatidão luminosa do seu methodo, como na sublime, e admirável especulação das suas doutrinas, que ellas não somente em rigor, ou com propriedade merecem o nome de Sciencias; mas tambem são as que tem acreditado singularmente força, o engenho, e a sagacidade do homem. Por isso he indispensavelmente necessario, ainda para segurança e adiantamento de outras Faculdades, que estas Sciencias tenham na Universidade hum estabelecimento [...]. (Universidade de Coimbra, 2012, p. 170).

E, com esse pensar a Matemática é elevada a curso superior, juntamente com a Teologia, com os Cursos Jurídicos, com a Medicina e com a Filosofia. Os alunos do curso de Matemática têm privilégio perante os demais, pois, se quiserem podem ingressar na Marinha ou nas Engenharias sem prestar os exames de seleção.

O Curso de Matemática é organizado em quatro cadeiras: três de Matemáticas Puras e uma de Ciências Físicas-Matemáticas e Astronomia. De acordo com os Estatutos da Universidade de Coimbra (1772),

> a primeira Sciencia na Mathematica (ainda que pela sua maior difficuldade, e abstracção não seja tratada em primeiro lugar pela maior parte dos Authores) he a Algebra: a qual trata das propriedades, e relações da Grandeza em geral; e contém os Principios Fundamentaes da Analyse, que he a chave de todos os descubrimentos mathematicos, que se podem fazer sobre a quantidade, considerada não somente no estado atual, e finito, mas também nas variações, e fluxões instantâneas, de cujo agregado se compõem. (Universidade de Coimbra, 2012, p. 162).

Para fins de organização e aprendizado, o mesmo Estatuto define que os estudos devem começar pela Aritmética e Geometria, incluindo a Trigonometria Retilínea e Esférica, consideradas um ramo da Geometria.

De acordo com os Estatutos (1772), o curso começa com um panorama histórico sobre essa Ciência, desde sua origem, passando por Tales, Pitágoras, a Escola de Alexandria, pelos os Gregos. Posteriormente inicia-se o estudo das Matemáticas Puras, como são chamadas a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. De Aritmética, considerada necessária a todas as pessoas de todas as classes, estudam-se as operações com números, os símbolos, as unidades, os números simples, complexos, inteiros, quebrados (ordinários e decimais), os números quadrados e cúbicos, a extração das raízes, proporções e progressões (aritmética e geométrica), e as regras de três mais usadas: a simples, a composta, a direta, a inversa, a de falsa posição, a de sociedade[5], além dos logaritmos e suas operações. Terminada a Aritmética inicia-se o estudo da Geometria Elementar, que são os elementos de Euclides. E depois a Trigonometria Plana, que é a construção de tábuas dos Senos, Tangentes e Secantes, explicação de como se constrói e se usa as mesmas. E, por último, o estudo do Triângulo Retângulo. Para terminar o curso de Geometria vem o estudo da Trigonometria Esférica.

[5] Regra de três de sociedade é um termo utilizado no âmbito da matemática financeira para estudar as atividades de um grupo de pessoas que formam uma sociedade: lucros, prejuízo, investimentos, tempo, capital.

A Álgebra, concebida nos Estatutos (1772, p. 176) como "arte de representar por símbolos", abrange os seguintes conteúdos: um resumo da história da Álgebra, cálculo algébrico (elementar e infinitesimal), passar as quantidades para a linguagem algébrica, estudo das operações, cálculo literal, extração de raízes, equações e expressões algébricas, mostrar seu uso na Análise, Aritmética e Geometria por meio de uma quantidade suficiente de problemas, estudo das curvas, cônicas, parábolas, elipse, hipérbole e construção das respectivas equações. E, por fim, a Álgebra Infinitesimal, englobando seus dois ramos: o Cálculo Diferencial e Integral.

Ao terminar o estudo, do que os Estatutos definem como Matemáticas Puras (Álgebra, Aritmética e Geometria), o estudante desse curso inicia os estudos das Ciências Físicas e suas ramificações, tais como Geodesia, Stereometria, Aerometria, Hidrometria, entre outras.

Para o 'melhor' entendimento desses conteúdos, o aluno desse curso é obrigado a estudar alguns Compêndios, dentre os quais, os Estatutos destacam: o de Bézout para o estudo de Análise Infinitesimal e Integral, o de Marie para o de Ciências Físicas-Matemáticas e o de Lacaille. Segundo Valente (2007, p.78), "em 1763, Bézout é encarregado de escrever um curso matemático para os guardas da marinha francesa. [...] É assim que entre 1764 e 1769, Étienne Bézout publica vários volumes de seu *Cours de Mathématiques à l'usage des gardes Du pavillon et de la marine*". Além desse Compêndio, Bézout escreveu outro denominado *Éléments d'Analyse mathématique*, utilizado no curso de Matemática da Universidade de Coimbra para o estudo de Análise Integral e Infinitesimal, por ser extremamente didático e voltado para aplicações práticas. É desse modo que as Reformas Pombalinas organizam o primeiro curso de Matemática Superior em Portugal.[6].

Considerações finais

As reformas pombalinas, cujo objetivo é desenvolver uma nova postura social, menos centrada na fé e mais fundamentada na ciência, promovem inúmeras mudanças no Estado português, mas, principalmente na Educação. São tentativas de aproximar a educação portuguesa e seus métodos da ciência newtoniana, entendida como ciência de ponta e valorizada em grande parte da Europa. Com o intuito de fortalecer a monarquia e enfraquecer o poder político da Igreja, o Estado assume a educação das pessoas e há uma valorização da ciência em todas as etapas da educação escolar. O objetivo agora não é mais formar o padre ou o teólogo, mas sim, formar o cientista.

A era pombalina termina quando D. Maria I acusa o Marquês de Pombal de desobediência e o encaminha para o exílio. Com o Marquês de Pombal destituído de seu poder, há uma nova reaproximação entre a monarquia portuguesa e a Igreja e, desse modo, as ordens religiosas assumem novamente a educação das crianças portuguesas, incluindo as brasileiras.

Mas as Reformas promovidas pelo Marquês de Pombal deixam marcas profundas na Educação Portuguesa, principalmente no que diz respeito à Matemática, que passou a ser vista como um pré-requisito para o entendimento de qualquer ciência. Com essa mudança de perspectiva vieram outros conteúdos, além dos elementos de Euclides ensinados pelos jesuítas, principalmente o Cálculo e a Álgebra, conforme exposto no quadro I.

[6] De acordo com as "Resoluções de 1809", em 19 de Agosto de 1799, por meio de uma carta régia, é estabelecido que na capital brasileira seja oferecida pelo menos uma cadeira de Aritmética, Álgebra e Trigonometria. Sendo que o ensino de Álgebra deve ser limitado até o ensino das equações de segundo grau.

As reformas pombalinas tiram a Matemática da posição de pré-requisito para a aprendizagem de Física, como estava organizada na época dos Jesuítas (Mondini, 2013) e a colocam como um conhecimento necessário às Ciências (Física, Geografia, Astronomia, dentre outras). Desse modo, conhecimento matemático se torna sinônimo de desenvolvimento social, científico e econômico. Com o avanço das ideias iluministas, a Matemática e não mais à religião tem o papel de desenvolver as ferramentas para a construção do conhecimento.

Referências e bibliografia

Bicudo, M. A. V. (2011) Aspectos da Pesquisa Qualitativa Efetuada em uma Abordagem Fenomenológica. In: Bicudo. A. V. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez Editora, 29 - 40.

Carvalho, L. R. (1978). *As Reformas pombalinas da Instrução pública*: São Paulo. Edusp.

Mondini, F. (2013). *A presença da Álgebra na Legislação escolar brasileira.* (Tese em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, 2013, Rio Claro, 20-54.

Rosa (2012), C. A. P. (2010). *História da Ciência*. Volume I: Da antiguidade ao renascimento científico. Brasília. 496 p. Recuperado em 02 de outubro de 2012, de http://www.funag.gov.br/biblioteca/dmdocuments/HISTORIA_DA_CIENCIA_VOL_I_TOMO_I.pdf.

Universidade de Coimbra. (2012). *Estatutos***.** Recuperado em 01 de janeiro de 2012, de http://bdigital.sib.uc.pt/bg1/UCBG-R-44-3_3/UCBG-R-44-3_3_master/UCBG-R-44-5/UCBG-R-44-5_item1/P182.

As Ternas Pitagóricas e os Números Congruentes: uma breve história

Inocêncio **Fernandes** Balieiro Filho
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br
Jaime Edmundo **Apaza** Rodriguez
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br
Nair **Rodrigues** de Souza
Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
nair.souza@ifms.edu.br

Resumo

Neste trabalho, por meio de uma revisão histórica, estabelecemos uma discussão sobre dois problemas clássicos e paralelos: As ternas pitagóricas e os Números Congruentes. Para isso, elaboramos um panorama histórico do desenvolvimento desses problemas, desde os estudos realizados pelos babilônicos, pelos gregos e pelos árabes, passando pelos trabalhos de Fibonacci na Idade Média e chegando a sua formulação atual, para discutir as relações desses dois problemas com as Aritméticas das Curvas Elípticas, assunto que é estudado na atualidade por seu uso na Criptografia.

Palavras chave: ternas pitagóricas, equação diofantina, números congruentes, Teorema de Pitágoras, triângulos retângulos.

Introdução

A arte de resolver problemas envolvendo equações diofantinas é muito antiga e até hoje existem problemas sem solução ou com soluções parciais e, em outros casos, com soluções diversas. Um desses problemas, como veremos adiante, tem a ver com as chamadas ternas pitagóricas e esta intimamente relacionada com o problema dos números congruentes. O estudo desse assunto e outros similares remontam a tempos antigos e, por isso, faremos um breve retrospecto histórico. Embora existam várias definições equivalentes, a melhor forma de definir um número congruente é: um inteiro positivo que pode ser representado pela área de um triângulo retângulo cujos lados são números racionais. Neste trabalho, poderemos perceber que esse estudo envolve as ternas pitagóricas.

A metodologia de pesquisa empregada no presente trabalho é o estudo bibliográfico. Para a realização do estudo bibliográfico foram seguidas as etapas de documentação, leitura de

reconhecimento, leitura seletiva, leitura reflexiva, leitura interpretativa e redação da pesquisa, descritas em Balieiro (2004).

O problema dos números inteiros que representam áreas de triângulos retângulos, cujos lados sejam números racionais, é antigo e conhecido como o Problema dos Números Congruentes. Isto apareceu pela primeira vez nos manuscritos árabes, por volta de 900 a.C. Em 1983, J. B. Tunnell deu uma resposta conjectural para esse problema, demonstrando que se existe um triângulo com área n (com n par ou ímpar), então o número de soluções pares é igual ao número de soluções ímpares (para certas equações diofantinas). No entanto, a demonstração da recíproca dessa afirmação que usa a conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer, ainda não foi demonstrada.

O problema dos Números Congruentes (Ternas Pitagóricas) remonta à época do matemático italiano Leonardo Pisano (Fibonacci). Naquela época, a Europa ainda estava no período "negro" da sua história, ao passo que os árabes estavam no auge de sua glória. Eles ensinaram a Fibonacci o que hoje é chamado de sistema de numeração hindu-arábico, que tinham aprendido com professores visitantes da Índia. E, assim, Fibonacci introduziu esse sistema na Europa. No seu livro *Liber Abacci* (O Livro dos Cálculos), ele ensinou aos europeus como fazer aritmética com os nove figuras dos indianos e o símbolo 0, o que os árabes chamavam de cifra. Nesse período, na Europa usavam-se os numerais romanos, que não eram muito adequados para as operações elementares da Aritmética. Além disso, Fibonacci também deu contribuições originais na Teoria dos Números. As questões matemáticas que foram solucionadas por Fibonacci foram propostas pelo matemático João de Palermo, da corte do Imperador Frederico II. Parece que Frederico II admirava e estava ciente dos trabalhos de Fibonacci sobre Matemática.

Em 1225, a corte de Frederico II reuniu-se em Pisa e Fibonacci foi convidado para demonstrar suas descobertas em Matemática. Não se sabe exatamente quando João de Palermo publicou seus problemas, mas os dois certamente se reuniram em Pisa e João entregou os seus problemas diretamente a Fibonacci. Nesta reunião, Fibonacci foi questionado por João, se 5 é a área de um triângulo retângulo com todos os lados racionais. Mas, segundo Dickson (1971), essa questão remonta a um manuscrito árabe escrito anonimamente em algum lugar antes de 972. Hoje, sabemos que 6 é o menor número natural que é a área de um triângulo retângulo cujos comprimentos dos lados são números inteiros e que o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 é o único triângulo cuja área é 6. Em 1225, Fibonacci descobriu um triângulo retângulo de lados 3/2, 20/3 e 42/6, cuja área é 5, que é um número natural menor do que 6. Isto levantou a seguinte pergunta: É possível que cada número natural n possa ser representado como a área de um triângulo retângulo cujos lados sejam números racionais? Há 350 anos, Fermat mostrou que a resposta é negativa para n =1, 2 ou 3 (e, portanto, para n =4). Assim, Fibonacci já tinha encontrado o menor número congruente, ou seja, um número natural que é a área de um triângulo retângulo racional.

A sequência dos números inteiros congruentes começa com 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24,... Por exemplo, 5 é um número congruente porque representa a área de um triângulo de lados 20/3, 3/2, 41/6. Similarmente, 6 é um número congruente, pois representa a área de um triângulo de lados 3, 4, 5; ao passo que 3 não é um número congruente, pois 3 não está dentro dessas especificações. Se q é um número (racional) congruente, então s^2q também é um número congruente para qualquer número racional s (basta multiplicar cada lado do triângulo por s).

Para perceber o desafio, o leitor é convidado a demonstrar que 7 é um número congruente e exibir um triângulo retângulo racional de área 7.

Até hoje, ninguém encontrou ainda um algoritmo incondicional que decida, em um número finito de passos, se um dado número natural n é congruente ou não. É claro que uma forma de demonstrar que um dado número natural n é congruente é produzir um triângulo racional com área n. Mas, encontrar tal triângulo é a tarefa mais difícil. Por exemplo, o matemático americano D. Bernard Zagier demorou um tempo razoável para encontrar um triângulo com todos os lados de comprimento racional e cuja área é o número primo 157.

A ausência de ternas pitagóricas no período egípcio antigo

A constituição da civilização egípcia surge da unificação de comunidades rurais e urbanas, localizadas próximas ao curso do Rio Nilo, que se aglutinaram para formarem os reinos do Alto e do Baixo Egito. Conforme Grimal, o primeiro rei que reuniu os impérios do Alto e Baixo Egito foi Narmer. De Narmer, que começa por volta de 3100 a. C. e termina com a conquista de Alexandre por volta de 322 a. C., sucederam distintos impérios e períodos intermediários.

Os documentos (papiros) que contêm registros de conteúdos de Matemática foram preservados em virtude do clima seco do Egito. E, segundo Clagett (1999), as principais informações de conteúdo matemático são o papiro de Rhind, o papiro de Moscou, o rolo de couro de Matemática Egípcia, os papiros de Kahun, Berlim e Reisner. Ainda segundo Clagett (1999), a matemática contida nesses documentos descreve problemas de aritmética, álgebra ou geometria relacionados com contagens, inventários de bens, produtos, prisioneiros, medidas de comprimentos, medidas de área, medidas de volume e medidas de tempo (horas, dias, meses e anos). Gillings (1982) indica não haver vestígios relacionados com o Teorema de Pitágoras na matemática do povo egípcio. Além disso, cita alguns historiadores da Matemática que argumentam em favor desse ponto.

> Não há documento algum para comprovar que no Egípcio sabia sequer um caso particular do teorema de Pitágoras. R. C. Archibald
> Em 90% de todos os livros, encontra-se a afirmação que os egípcios conheciam o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, e que eles utilizaram para construir ângulos retos. Quanto valor tem essa afirmação? Nenhum! B. L. Van Der Waerden
> Não há indicação que os Egípcios tinham qualquer noção do teorema de Pitágoras, apesar de algumas histórias infundadas sobre "harpedonaptai" (esticadores de corda), que supostamente construíram triângulos retângulos com a ajuda de uma corda com 3 + 4 + 5 = 12 nós. Dirk J. Struik
> O historiador Cantor tinha suspeitado de que os egípcios sabiam que (3, 4, 5) é triângulo retângulo, e que eles utilizavam esse conhecimento para construir ângulos retos. A. Seidenberg.
> Não parece haver evidência alguma que eles sabiam que o triângulo (3, 4, 5) é retângulo; de fato, de acordo com a mais recente autoridade (T. Eric Peet, The Rhind Mathematical Papyrus, 1923), nada em matemática egípcia sugere que os Egípcios estavam familiarizados com esse ou quaisquer casos especiais do teorema de Pitágoras. T. L. Heath. (Gillings, 1982, p. 242)

As ternas pitagóricas no período babilônico

A denominada civilização babilônica engloba um conjunto de povos que viveram na Mesopotâmia em um período que começa por volta 5.000 a. C. e termina por volta dos primeiros tempos do cristianismo. A constituição dessa civilização deve-se aos vários povos (sumérios,

acádios, assírios, babilônios e outros) que habitaram as regiões entre os rios Tigre e Eufrates. Por volta de 3.000 e 2.000 a. C., a parte sul da Mesopotâmia foi governada pelos sumérios, cuja cultura alcançou um nível elevado. Eles pertencem aos primeiros povos que foram capazes de estabelecer uma forma de escrita que consistia em pressionar símbolos numa superfície (tábuas) de argila mole, com um estilete em forma de cunha, que depois cozinhavam. Um número considerável dessas tábuas foi desenterrado no final do penúltimo e último século em sítios arqueológicos. Os símbolos em forma de cunha (cuneiformes) também foram utilizados para representar um sistema numérico desse povo.

Os textos mais antigos datam de cerca de 3000 a. C., época da primeira dinastia de Ur. No decorrer do tempo, um povo que habitava mais ao norte da Mesopotâmia, os Acádios, migraram para o sul. E com o tempo dominaram os sumérios e influenciaram cultura desse povo, em especial, o seu sistema de numeração.

Por volta de 1800 a. C., Hamurabi, o governante da cidade de Babel, consolidou seu poder conquistando o império sumério-acadiano e fundou a primeira dinastia da Babilônia. Esse império se desintegrou após sua morte, mas a cultura babilônica permaneceu por muitos anos. Os mais antigos textos de Matemática desse povo datam do período 1900-1600 a. C.

Pode-se observar que a Matemática babilônica não tinha teoremas e demonstrações geométricas formuladas como as que conhecemos atualmente. Com efeito, alguns dos problemas eram restritos a cálculo de comprimentos de segmentos de reta e cálculo de áreas. Assim, a partir desses problemas, pode-se afirmar que os babilônios estavam familiarizados com diversos teoremas, em especial, com o teorema denominado de Pitágoras. De fato, segundo relato de Katz, o teorema de Pitágoras já era conhecido muito antes no nascimento desse filósofo.

> Um dos problemas babilônicos sobre raiz quadrada está ligado à relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Essa relação é um caso especial do resultado conhecido como o teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. O nome desse teorema é em homenagem ao filósofo e matemático grego do século VI a. C., é indiscutivelmente o teorema elementar mais importante em Matemática, uma vez que as suas consequências e generalizações têm ampla aplicação. No entanto, é um dos primeiros teoremas conhecidos das civilizações antigas; de fato, há evidências de que ele era conhecido pelo menos 1000 anos antes de Pitágoras. (Katz, 1998, p.30)

Katz sinaliza que há indícios da utilização de ternas pitagóricas em construções de templos megalíticos.

> Alguns estudiosos têm argumentado que as pedras dos templos na Inglaterra relacionadas com a astronomia e edificada no terceiro milênio a. C. foram construídas utilizando o conhecimento do teorema de Pitágoras e, em especial, ternas pitagóricas, ternas de inteiros (a, b, c), tal que $a^2 + b^2 = c^2$. No entanto, a evidência disso é bastante tênue. (Katz, 1998, p.30)

Além disso, conforme Katz há registros históricos comprobatórios em placas de argila do período de Hamurabi que comprovam o conhecimento, construção e utilização de ternas pitagóricas. Em especial, se tem a tabuleta Plimpton 322, que consta no acervo da Biblioteca de Livros Raros e Manuscritos da Universidade de Columbia, que foi estudada por Neugebauer e Sachs. O historiador Katz, em seu texto, reproduz em notação decimal o conteúdo dessa tabuleta e explica como o escriba babilônico conseguiu obter essas ternas pitagóricas.

Há evidências mais substanciais de interesse em ternas pitagóricas na tabuleta babilônica Plimpton 322, que data aproximadamente de 1700 a. C. A parte existente nessa tabuleta consiste em quatro colunas de números. (Outras colunas existentes no lado esquerdo foram possivelmente quebradas). Seguem os números sobre a tabuleta, reproduzidos em notação decimal moderna, com as poucas correções que fizeram os recentes editores e com a conjectura de uma quinta coluna à esquerda. (Katz, p.30)

y	$(x/y)^2$	x	d	
120	0.9834028	119	169	1
3456	0.9491586	3367	4825	2
4800	0.9188021	4601	6649	3
13500	0.8862479	12,709	18,541	4
72	0.8150077	65	97	5
360	0.7851929	319	481	6
2700	0.7199837	2291	3541	7
960	0.6845877	799	1249	8
600	0.6426694	481	769	9
6480	0.5861226	4961	8161	10
60	0.5625	45	75	11
2400	0.4894168	1679	2929	12
240	0.4500174	161	289	13
2700	0.4302388	1771	3229	14
90	0.3871605	56	106	15

Foi uma das principais peças do trabalho do detetive matemático para os primeiros estudiosos modernos decidir que essa tabela era um trabalho matemático, em vez de uma lista de pedidos para uma empresa de cerâmica e, em seguida, encontrar uma explicação matemática razoável. Mas eles a encontraram. As colunas intituladas x e d (cujas entradas no original podem ser traduzidas como "lado-quadrado da largura" e "lado-quadrado da diagonal") contêm em cada linha dois dos três números de uma terna pitagórica. É suficientemente fácil subtrair o quadrado da coluna x do quadrado da coluna d, e em cada caso, resulta em quadrados perfeitos, cuja raiz quadrada está indicada na coluna y reconstruída. Finalmente, a outra coluna representa o quociente $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. Como e por que foram esses ternos derivados? Não é possível encontrar ternas pitagóricas desse tamanho por tentativa e erro. A coluna $\left(\frac{x}{y}\right)^2$, cuja entrada não é clara, mas diz algo como "o quadrado auxiliar do retângulo que é extraído de forma que a largura...", pode dar uma sugestão a respeito de como foi construída a tabela. Para encontrar soluções inteiras para a equação $x^2 + y^2 = d^2$, pode-se dividir por y e primeiro encontra-se soluções para $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{d}{y}\right)^2$, ou, fazendo $u = \frac{x}{y}$ e $v = \frac{d}{y}$, para obter $u^2 + 1 = v^2$. Esta última equação é equivalente a $(v + u)(v - u) = 1$. Ou seja, podemos pensar de $v + u$ e $v - u$ como os lados de um retângulo cuja área é 1. (Katz, p.30-31)

A equação $x^2 + y^2 = d^2$ é uma equação diofantina e está relacionada com o problema dos chamados Números Congruente ou equivalentemente, o problema das ternas Pitagóricas, objeto principal da teoria de triângulos retângulos racionais (segundo antigos manuscritos árabes). O

Problema dos Números Congruentes consiste em determinar quais são os números inteiros positivos que são congruentes. Um número congruente é um inteiro positivo que pode ser representado pela área de um triângulo retângulo cujos lados são números racionais. Então, é possível observar, pela análise feitas por Katz, que os babilônios tinham uma ideia grosseira, na época, da busca dos hoje chamados Números Congruentes. A tabela acima mostra de uma forma "rudimentar" esse conhecimento.

As ternas pitagóricas no período grego antigo

O mundo grego, cujo núcleo estava estabelecido entre o mar Egeu e o mar Jônico, compreendia numerosas povoações disseminadas pelas costas do mar Negro. Essas colônias estavam distribuídas ao redor do mar Mediterrâneo. Assim, essas possessões jônicas, situadas próximas dos focos das culturas egípcias e babilônicas, se comunicavam por meio de barcos com esses antigos centros de cultura. Dessa forma, as colônias jônicas compartilhavam diretamente os conhecimentos matemáticos e astronômicos desses povos.

Conforme Heath (1981), a história mais antiga da Matemática grega foi escrita por Eudemo, discípulo de Aristóteles, por volta do século IV a. C.. Um conciso compêndio desse tratado aparece nos *Comentários sobre o primeiro libro dos Elementos de Euclides*, escrito por Proclus no século VI d. C. Nesse compêndio, podemos conhecer que o fundador da Geometria grega foi Thales de Mileto, que adquiriu seus conhecimentos em viagens que fez ao Egito. Ainda nesse fragmento, preservado por Proclus, é mencionado o nome de Pitágoras (569 – 475 a. C.), como aquele que transformou, examinou e estudou a Geometria e a Aritmética. Depois de falar sobre Pitágoras, Proclus fala que Platão (427 – 347 a. C.) introduziu o método analítico nas demonstrações matemáticas e discutiu os fundamentos dessa ciência.

Duvillié (1999) afirma que os pitagóricos estabeleceram que todo número quadrado n^2 é igual à soma do número quadrado $(n-1)^2$ e do número ímpar $(2n-1)$. De fato, $n^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = (n-1)^2 + (2n-1)$.

De modo geral, os pitagóricos procuravam os números ímpares que eram números quadrados, isto é, determinavam os inteiros positivos n tais que $2n-1 = m^2$, com m ímpar e $m \geq 3$, que implica: $n = \frac{m^2+1}{2}$ e $n - 1 = \frac{m^2+1}{2} - 1 = \frac{m^2-1}{2}$. Assim, temos $n^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$ e $(n-1)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2$. Portanto, temos a seguinte relação: $\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2$. Proclus atribui a Pitágoras essa fórmula.

A relação obtida pode ser simplificada multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 4. Desse modo, obtemos a relação válida para todo número inteiro positivo $m \geq 2$: $(m^2-1)^2 + (2m)^2 = (m^2+1)^2$. Proclus atribui a Platão essa fórmula. Mas, segundo Duvillié (1999), conjectura-se que os pitagóricos já conheciam essa relação. Ainda seguindo as indicações de Duvillié, tal fórmula pode ser obtida, considerando que o número $(n+1)^2$ é a soma do número quadrado $(n-1)^2$ e de dois números ímpares consecutivos $(2n-1)$ e $(2n+1)$. De fato, $(n+1)^2 = (n-1)^2 + (2n-1) + (2n+1)$ ou $(n+1)^2 = (n-1)^2 + 4n$. Dessa igualdade, podemos estabelecer que uma condição necessária e suficiente para que $4n$ seja um número quadrado é que n seja o quadrado de um número inteiro. Por fim, substituindo nessa última relação, $n = m^2$, com $m \geq 2$, obtém-se a fórmula de Platão: $(m^2+1)^2 = (m^2-1)^2 + (2m)^2$.

As relações de Pitágoras e Platão se completam, mas nenhuma das duas fornece uma solução completa para o estabelecimento de todas as ternas. Com efeito, tal solução completa pode ser obtida pelo lema 1 à proposição 29, do livro X, dos *Elementos* de Euclides (325 – 265 a. C.): *Achar dois números quadrados, de modo a também o composto deles ser um quadrado*.

> Fiquem exposto os dois números AB, BC, sejam ou pares ou ímpares. E como, tanto caso um par seja subtraído de um par quanto caso tanto um ímpar, de um ímpar, o resto é par; portanto, o resto AC é par. Fique cortado o AC em dois no D. E sejam também os?AB, BC ou planos semelhantes ou quadrados, que são também, eles mesmos, planos semelhantes; portanto, o dos AB, BC, com o quadrado sobre [o] CD, é igual ao quadrado sobre o BD. E o dos AB, BC é um quadrado, porque foi provado que, caso dois planos semelhantes, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é um quadrado. Portanto, foram achados dois números quadrados, tanto o dos AB, BC quanto o sobre o CD, que tendo sido compostos, fazem o quadrado sobre o BD.
>
> E é evidente que foram achados de novo dois quadrados, tanto o sobre o BD quanto o sobre o CD, de modo que o excesso deles, o pelos AB, BC, ser um quadrado, quanto os AB, BC sejam planos semelhantes. Mas, quando não sejam planos semelhantes, foram achados dois quadrados, tanto o sobre o BD quanto o sobre o DC, dos quais o excesso, o pelos AB, BC, não é um quadrado; o que era preciso provar. (Euclides)

Para demonstrar esse lema, Euclides, utiliza, nesta ordem, as proposições 24 e 26 do livro IX, a proposição 6 do livro 2 e a proposição 1 do livro IX. Para explicitar a proposição esse lema de Euclides, seguiremos as explicações de Duvillié (1999):

1. Em conformidade com a demonstração de Euclides, temos que $AB > BC$, AB e BC são simultaneamente pares ou ímpares e $AC = AB - BC$ tem a mesma paridade que AB e BC.
2. Euclides considera os números AB e BC como *números planos semelhantes* (quadrados), ou seja, números da forma $mp \times np$ e $mq \times nq$, com $q > p$.
3. Neste caso, temos o retângulo com medida de área igual a $m \times n$; o retângulo com medida de área igual a $BC = mp \times np = mnp^2$; e o retângulo com medida de área igual a $AB = mq \times nq = mnq^2$.
3. $AB \times BC = m^2n^2p^2q^2$; $CD^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB-BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2$;
4. $DB^2 = (BC + CD)^2 = \left(mnp^2 + \frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$;
5. $AB \times BC + CD^2 = m^2n^2p^2q^2 + \frac{m^2n^2q^4-2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4} = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$;
6. Então, $AB \times BC + CD^2 = m^2n^2p^2q^2 + \frac{m^2n^2q^4-2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4} = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$;
7. Esta última equação pode ser escrita: $(mnpq)^2 + \left(\frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$.

Na equação da linha 7, ao substituir $p = 1$ e ao dividi-la em ambos os lados essa equação por mn, obtemos a *relação de Pitágoras*: $q^2 + \left(\frac{q^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{q^2+1}{2}\right)^2$. E ao multiplicar aquela equação da linha 7, em ambos os lados por 4, obtemos a *relação de Platão*: $(2q)^2 + (q^2-1)^2 = (q^2+1)^2$.

Por fim, ao multiplicar por $\frac{4}{(mn)^2}$ os dois membros da equação da linha 7, obtemos a *relação de Euclides*: $(2pq)^2 + (q^2-p^2)^2 = (q^2+p^2)^2$, com $q > p \geq 1$.

As ternas pitagóricas no período Hindu e Islã

Conforme Dickson, os sacerdotes védicos, Baudhayana e Apastamba obtiveram algumas ternas pitagóricas que são exemplos das regras de Pitágoras e Platão. Conforme Dickson (1971, p.25), "Os Hindus Baudhayana e Apastamba, cerca do século V a.C., obtiveram de forma independente dos gregos as soluções (3,4,5), (5,12,13) e (7, 24, 25) que são exemplos da regra de Pitágoras e (8, 15, 17) e (12, 35, 37) que são exemplos da regra de Platão."

Dickson (1971) afirma que Brahmagupta (598 – 670) explicitamente estabeleceu a solução $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$.

Ainda conforme Dickson, Bhaskara II (1114 – 1185) ou Bhaskaracharya (Bhaskara o professor) estabelece as relações já conhecidas por Brahmagupta.

> Bhaskara (nascido em 1114) estabelece que $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$ e a empregou, como fez Brahmagupta, para encontrar o segundo lado $(\frac{m^2}{n} - n)/2$ e a hipotenusa $(\frac{m^2}{n} + n)/2$, dado um lado m. Dada a hipotenusa h, os lados são $l = 2hb/(b^2 + 1)$ e $lb - h$ ou $h - q$ e bq, onde $q = 2h/(b^2 + 1)$. Para encontrar um triângulo retângulo cuja área igual à hipotenusa tome 3z, 4x, 5z como os lados. (Dickson, 1971, p.166)

Ainda, consoante Dickson, encontramos em trabalhos de matemáticos árabes aquelas relações estabelecidas por Brahmagupta e Bhaskara.

> Em um manuscrito anônimo árabe de 972 declara-se que, em cada triângulo retângulo primitivo (ou seja, com lados inteiros relativamente primos), os lados são dados por $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$. As condições necessárias para que $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$ estabeleçam um triângulo retângulo primitivo são m e n serem relativamente primos e $m + n$ ser ímpar. A hipotenusa de um triângulo retângulo primitivo é uma soma de dois quadrados e é da forma $12k + 1$ ou $12k + 5$, embora nem todos os números sejam somas de dois quadrados. Mas, 65^2 é uma soma de dois quadrados de duas formas: $63^2 + 16^2 = 33^2 + 56^2$.
>
> O árabe Ben Alhocain (décimo cento) estabeleceu uma demonstração geométrica que $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$ são os lados de um triângulo retângulo, e observou que, se a hipotenusa for par, também ambos os lados são pares, equivalentes às regras que foram estabelecidas por Pitágoras. Também falsos teoremas sobre triângulos formados a partir de vários números consecutivos foram obtidos desta forma.
>
> Alkarkhi (fim do decimo século) deriva a solução 3, 4, 5 de $x^2 + y^2 = z^2$ pela configuração $y = x + 1$ e $z = 2x - 1$. (Dickson, 1971, p.166)

Esta é uma conclusão válida que é simples de verificar. E a ideia de como surgiu essa fórmula vem da discussão acima.

Por fim, o matemático persa al Khazin (900 – 971) demonstra três lemas para poder estabelecer a proposição relacionada com as ternas pitagóricas e propõe alguns problemas que se relacionam com essas ternas. Para uma análise completa do trabalho de al Khazin, citamos Rashed.

> Lema 1. Não existe qualquer par de números inteiros quadrados ímpares cuja soma é um quadrado.
>
> Demonstração. Seja (a, b) um par de números inteiros quadrados ímpares tais que $a + b = c$, onde c é um quadrado. (1)

Seja $a = x^2$, $b = y^2$ e $c = z^2$. Então (1) é escrito como $x^2 + y^2 = z^2$.

Como a e b são ímpares, temos que c é par; portanto, x e y são ímpares e z é par. A partir de (1), deduzimos $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (z - y)^2 + 2y(z - y)$. (2)

No entanto $(z - y)$ é ímpar, logo $z - y = 2p + 1$.

Por outro lado, $x^2 = [x + (z - y)][x - (z - y)] + (z - y)^2$. (3)

A partir de (2) e (3) deduzimos $2y(z - y) = [x + (z - y)][x - (z - y)]$.

Assumimos $z - y = 2p + 1$, então $x + (z - y)$ são pares e $x - (z - y)$ é par; o segundo membro é divisível por 4; mas, no primeiro membro, $y(z - y)$ é ímpar. Portanto, a igualdade é impossível. Daqui a conclusão.

Lema 2. É impossível que os lados de dois quadrados cuja soma é um quadrado ser sempre par.

Demonstração. Assumimos $x = 2^m$ e $y = 2^n$ com $m < n$. Se $p = n - m$, então $\frac{x}{y} = \frac{1}{2^p}$, de onde deduzimos $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2^{2p}}$ e $\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+2^{2p}}$.

Mas, $1 + 2^{2p}$ não é um quadrado [já que dois quadrados nunca são consecutivos]; portanto, também, $x^2 + y^2$ não é um quadrado. (p. 211-212)

Lema 3. $(a^2 + b^2)^2 = b^2 + 4\frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{2}\right)$

A identidade é verificada para a ímpar e b par, para a e b pares, utilizando a proposição II-8 dos Elementos.

Problema 1. Encontre dois números quadrados, um par, o outro ímpar co-primos, cuja soma é um quadrado. Isto significa encontrar ternos pitagóricos primitivos.

Suponhamos que existem esses números. Sejam x e y dois números tais que x é par e y é ímpar, e que: $x^2 + y^2 = z^2$. (1)

Seja $t = z - y$, t é par já que y e z são ímpares, e isso resulta em $z = \left(y + \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2}$. (2)

De acordo com o lema 3, temos $z^2 = y^2 + 4\left(y + \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)$, daqui $x^2 = 4\left(y + \frac{t}{2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)$, logo $\left(y + \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2}$ é um quadrado e, assim, é $\left(y + \frac{t}{2}\right) / \frac{t}{2}$.

Escreva $\left(y + \frac{t}{2}\right) / \frac{t}{2} = \frac{p^2}{q^2}$ com $(p, q) = 1$ e $p > q$, p e q têm diferentes paridades de acordo com (2). Daqui $y = p^2 - q^2$, $x = 2pq$ e $z = p^2 + q^2$. (Rashed, 1994, p. 210-213)

Seguem as análises e os comentários de Rashed.

Observação: É claro que al-Khazin implicitamente utiliza várias proposições dos Elementos - VIII-9, 24, 26; IX-2 - em sua análise. Ele não as cita explicitamente, pois as demonstrações contidas nos Elementos constituiu uma fonte comum para os matemáticos.

AI-Khazin não estabelece a síntese dessa proposição. Com efeito, foi estabelecida, em X-29, Lema 1, dos Elementos. Se combinarmos a análise de Al-Khazin com a síntese de Euclides, obtemos o seguinte teorema:

Sejam x, y e z três números tais que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $(x, y) = 1$ e x par.

As seguintes condições são equivalentes:

(a) Temos $x^2 + y^2 = z^2$.

(b) existe um par de números inteiros (p, q) tais que $p > q > 0$, $(p, q) = 1$, p e q têm paridades opostas, tal que $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$.

É o resultado de X-29, lema 1, de Euclides, que (b) ⇒ (a); e a proposição de al-Khazin que (a) ⇒ (b). Ele denomina essa última análise implicação.

Problema 2. Encontrar números quadrados múltiplos de 9 e 16 tais que a sua soma seja um múltiplo de 5.

A expressão deste problema de AI-Khazin é um pouco confusa. Ele procede da seguinte forma: Sabemos que se $p = 2$ e $q = 1$ temos $x = 4$, $y = 3$ e $z = 5$, uma terna pitagórica primitiva que responde ao problema. Se $p = 3$ e $q = 1$ temos $x = 6$, $y = 8$ e $z = 10$ uma terna não primitiva, um múltiplo da terna $(3, 4, 5)$ cujos quadrados são respectivamente múltiplos de 9, 16 e 5. É natural nos perguntar que terna de números inteiros positivos (a, b, c) satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$ (tripla ou terna pitagórica). (Rashed, 1994, p. 213)

As ternas pitagóricas em tempos contemporâneos

A mais famosa e padrão terna pitagórica é (3, 4, 5). Mas existem muitas outras, tais como (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29) e (8, 15, 17). O que seria uma lista completa de todas as ternas pitagóricas? Há apenas um número finito dessas ternas ou há uma lista infinita dessas ternas?

Consideremos a equação do segundo grau com três incógnitas, $x^2 + y^2 = z^2$, denominada equação pitagórica (equação diofantina). Queremos encontrar todas as soluções inteiras dessa equação. Desse modo, consideremos apenas aquelas formadas por números naturais. Se os números x, y, z são naturais que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$, então dizemos que a terna (x, y, x) representa um triângulo pitagórico.

A solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ é denominada uma solução primitiva se os números naturais x, y, z não têm divisor comum maior do que um. Se λ, μ, ν é uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$ e d é um número natural arbitrário, então $x = \lambda d$, $y = \mu d$ e $z = \nu d$ é também uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$. De fato, se $\lambda^2 + \mu^2 = \nu^2$, então multiplicando ambos os lados dessa equação por d^2 e utilizando $x^2 = \lambda^2 d^2$, $y^2 = \mu^2 d^2$ e $z^2 = \nu^2 d^2$ obtemos a equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Reciprocamente, se os números naturais x, y, z são uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, então colocando $(x, y, x) = d$ temos $x = \lambda d$, $y = \mu d$ e $z = \nu d$, onde $(\lambda, \mu, \nu) = 1$. Então, em virtude da equação $x^2 + y^2 = z^2$, temos $(\lambda d)^2 + (\mu d)^2 = (\nu d)^2$. Dividindo ambos os lados dessa equação por d^2 observamos que os números naturais λ, μ, ν constituem uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Dizemos que uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ em números naturais x, y, z pertence à d-ésima classe se $(x, y, x) = d$. Em virtude do que foi dito acima, a fim de obter todas as soluções em números naturais que pertencem à d-ésima classe, basta multiplicar todas as soluções primitivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$ por d. Assim, sem perda de generalidade, podemos limitar-nos a encontrar apenas as soluções primitivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Suponha que x, y, z é uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$. Demonstraremos que um dos números x, y é par e o outro é impar. Suponha que isto não é o caso, ou seja, que ambos são pares ou ímpares. No primeiro caso, o número $x^2 + y^2 = z^2$ seria par e, assim,

também o número z seria par. Portanto, os números x, y, z teriam um divisor comum 2, contrariando a suposição.

A fim de mostrar que o segundo caso também é impossível demonstramos que: *Dividindo o quadrado de um número natural ímpar por 8 obtemos resto 1*. Para ver isso, note que um número ímpar pode ser escrito na forma $2k-1$, onde k é um inteiro.

Daqui, $(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$. Mas um dos números k e $k-1$ devem ser par; assim, é divisível por 2, onde o número $4k(k-1)$ é divisível por 8 e assim, como requerido, dividindo $(2k-1)^2$ por 8 obtemos resto 1.

Por conseguinte, dividindo-se a soma dos quadrados de dois números naturais ímpares por 8 obtém-se resto 2, o qual, em virtude do que se demonstrou acima, mostra que a soma dos quadrados de dois números ímpares naturais não é o quadrado de um número ímpar. Ele também não pode ser o quadrado de um número par, uma vez que, neste caso, seria divisível por 4, de modo que o resto obtido dividindo-o por 8 seria 0 ou 4.

Assim, demonstramos que se x, y, z é solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, então x, y não podem ser ambos ímpares e z um inteiro. Daqui resulta que, se x, y, z é uma solução primitiva da equação $x^2 + y^2 = z^2$, então um dos números x, y, é par, e o outro ímpar. As soluções restantes são obtidas simplesmente trocando x e y.

Se numa dada solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$, o número y é par e o número x é ímpar, então o número z é ímpar. A equação $x^2 + y^2 = z^2$ pode ser escrita na forma $y^2 = (z+x) + (z-x)$. Os números $z+x$ e $z-x$, como a soma e a diferença de dois números ímpares, respectivamente, são ambos pares. Consequentemente, $z + x = 2a$ e $z - x = 2b$, onde a e b são números naturais. Daqui, $z = a + b$ e $x = a - b$.

Essas igualdades implicam que os números a e b devem ser relativamente primos, pois caso contrário eles teriam um divisor comum $\delta > 1$, e então teríamos $z = k\delta$ e $x = l\delta$, onde k e l são números naturais.

Recentemente, o Problema dos Números Congruentes surgiu de novo com a descoberta da sua forte conexão com a Aritmética das Curvas Elípticas, um assunto muito discutido nas últimas décadas. As curvas elípticas são equações cúbicas e elas são importantes, especialmente, na Criptografia, pois o conjunto de seus pontos apresenta uma estrutura algébrica (grupo abeliano).

Considerações

As ternas pitagóricas apareceram em problemas na Matemática Babilônia e, posteriormente, foram estudadas no período grego pelos pitagóricos e por Platão e aparecem de forma explícita na obra de Euclides e nos estudos de Diofanto. Também foi estuda por alguns matemáticos islâmicos e, nesse caso, estavam relacionadas com o Problema dos Números Congruentes, um antigo problema que remonta à época do matemático italiano Leonardo Fibonacci.

Através dos séculos diversas gerações de estudiosos, cientistas e matemáticos têm tentado achar uma solução geral para esse problema, encontrando, na maioria das vezes, soluções parciais. Uma solução geral implicaria encontrar um algoritmo que permitisse determinar quando um número natural é congruente ou não.

O Teorema de Pitágoras (e, portanto, as ternas pitagóricas) é a mais bela jóia da tradição pitagórica. Como lembrança inesquecível da época escolar, ele pertence à base cultural comum da humanidade. O seu estudo introduziu uma radical inflexão intelectual entre a prática empírica e indutiva e a argumentação lógico-dedutiva, tanto no aspecto histórico cultural matemático como no âmbito escolar.

As várias pesquisas realizadas em torno das ternas pitagóricas e dos números congruentes por uma gama extensa de pesquisadores e estudiosos ilustres destaca a ideia de que existem muitas formas de alcançar a mesma verdade. Como a origem da geometria racional, fundamento de uma multidão de teoremas e resultados, causa primeira da incomensurabilidade, e fronteira entre a matemática empírica e a dedutiva, as ternas pitagóricas e o teorema de Pitágoras aparecem como paradigma para a História da Matemática e da Matemática, representando um legado cultural para todos os povos da terra.

Gostaríamos de destacar que o estudo dos números congruentes e das curvas elípticas é extremamente significativo para muitos pesquisadores pelo simples fato de ter em aberto uma série de questões ainda sem resposta. Inicia-se com um inocente problema acerca de áreas de triângulos retângulos com lados racionais e então surgem as curvas elípticas de maneira natural no estudo de números congruentes. Além disso, se observa que a determinação de um número congruente se resume em determinar a cardinalidade de um conjunto finito – um problema de contagem (conjectura de Birch and Swinnerton-Dyer).

Referências Bibliográficas

Balieiro Filho, I. F. (2004). Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios da História da Heurística. Tese de Doutorado. Rio Claro: Unesp.

Chahal, J. S. (1998). *Topic in Number Theory*. New York: Springer.

Clagett, M. (1999). Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Three. Ancient Egyptian Mathematics. Philadelphia: American Philosophical Society.

Dickson, L. E. (1971). *History of the Theory of Numbers*. Vol. II. New York: Chelsea Publishing Company.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Addison-Wesley.

Duvillié, B. (1999). *Sur les traces de l'Homo Mathematicus: Les mathématiques avant Euclide*. Paris: Ellipses.

Gillings, R. J. (1982). Mathematics in the time of the Pharaohs. New York: Dover.

Heath, T. L. (1981). *A History of Greek Mathematics*. Vol. 1. New York: Dover.

Rashed, R. (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht: Springer.

Washington, L. C. (2008). *Elliptic Curves, Number Theory and Cryptography*. New York: Taylor & Francis Group.

Educação Matemática:
uma breve gênese e algumas reflexões sobre sua história

Miguel Jocélio **Alves** da Silva
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Brasil
migel.silva@gmail.com
Maria do Carmo de **Sousa**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
mdcsousa@ufscar.br

Resumo

Esta comunicação faz uma breve síntese genealógica da Educação Matemática como área de pesquisa, destacando o seu fortalecimento como área do conhecimento científico e acadêmico. Ao fazermos isto, trazemos também uma incursão ao Movimento da Matemática Moderna, na tentativa de possibilitar outros olhares para este movimento e seus significados, principalmente no Brasil. Para isto dialogamos com dois autores de referência, Jeremy Kilpatrick (1996) e Ubiratan D'Ambrósio (2004), onde tratam da gênese e da trajetória da Educação Matemática. Na tentativa de oferecer outros olhares para o Movimento da Matemática Moderna, dialogamos com Beatriz D'Ambrósio (1987), a partir da sua tese de doutorado, com Wielewski (2008) num dos estudos comparativos sobre o Movimento da Matemática Moderna, entre Brasil e Portugal. Dialogamos ainda com Cunha (1996), que nos ajuda a refletir sobre o clima político, social e educacional em que vivia o Brasil no período de (trans)implantação do Movimento da Matemática Moderna no país.

Palavras-chave: Educação Matemática, Movimento da Matemática Moderna, História da Educação Matemática no Brasil

Introdução

O ensaio teórico e bibliográfico, que gerou esta comunicação, foi produzido no âmbito dos estudos doutorais que estamos desenvolvendo. Especificamente nos diálogos e debates realizados no primeiro semestre de 2014 na disciplina de "Tendências em Educação Matemática", onde estudamos, dialogamos e debatemos alguns autores de referência que pesquisam a Educação Matemática e suas tendências.

A discussão, o diálogo e as reflexões que propomos aqui, através desta comunicação, tentam, a partir de uma perspectiva teórica, apresentar, ainda que de forma muito breve, uma gênese da Educação Matemática como campo científico e de pesquisa, buscando trazer algumas considerações sobre o seu surgimento e desenvolvimento.

Dentro desta discussão sobre o surgimento e desenvolvimento da Educação Matemática, trazemos ao diálogo e à reflexao, o Movimento da Matemática Moderna, que segundo Kilpatrick

(1996), contribuiu de alguma forma para a expansão da Educação Matemática, principalmente no ocidente.

Este movimento também chega à América Latina e ao Brasil, num período histórico determinado, marcado pela ditadura civil-militar que se instalou no país, a partir da segunda metade da década de 1960, período em que se dá o maior desenvolvimento do Movimento da Matematica Moderna em nosso território.

Neste sentido buscamos também, ainda que de forma breve, dado o caráter desta comunicação e o espaço que dispomos, dialogar um pouco sobre este período político, social e educacional em que vivia o Brasil, a fim de que possamos, com um olhar mais amplo sobre a realidade brasileira naquele momento, compreender num sentido mais largo, as circunstâncias em que o Movimento da Matemática Moderna aqui se instalou.

Estas questõe elencadas acima, pode ir nos ajudando, em certa medida, como o campo da Educação Matemática foi tecendo seu caminho, produzindo suas vertentes, estabelecendo diálogo com outras áreas do conhecimento, e ao mesmo tempo, vai encontrando um lugar próprio para o seu desenvovimento e fortalecimento.

Esta comunicação então, busca aproximar os debates e as reflexões, dos iniciantes na área de Educação Matemática, para que estes compreendam melhor suas perspectivas e desafios.

A gênese da Educação Matemática, a partir de Jeremy Kilpatrick (1996)

A Educação Matemática como área de pesquisa constitui-se numa intersecção de outras áreas do conhecimento científico e acadêmico, como a Educação, a Matemática e a Psicologia, que serviram de base para seu impulso inicial, mas com o decorrer do tempo, o avanço nas pesquisas e estudos na área, foi sendo ampliada com intersecção com outras áreas do conhecimento como a Antropologia, Sociologia, História, Filosofia, entre outras. Segundo Kilpatrick (1996), a Educação Matemática como área, tem aspectos acadêmicos e profissionais. O primeiro aspecto, ou seja o aspeco acadêmico, é uma área ainda em construção, mas que tem se fortalecido nas últimas décadas, à medida que suas pesquisas vão sendo cada vez mais qualificadas. No segundo aspecto, de acordo com destaque deste autor, a Educação Matemática deve buscar uma interação cada vez mais profícua com o ambiente da sala de aula, onde a Matemática e o seu ensino, os professores e os estudantes, em relação de aprendizagem, devem cada vez mais ser mediados pelas contribuições da Educação Matemática.

Apesar da área da Educação Matemática como campo científico e acadêmico ser recente, com menos de um século de atividade, segundo Kilpatrick (1996), ela tem raízes mais antigas, e remonta o período em que a Matemática passa a se constituir como conteúdo que deve ser ensinado e aprendido, num lugar singular chamado escola. O autor argumenta que a Educação Matemática teve um processo lento em seu desenvovimento inicial, discutindo que, mesmo existindo cadeiras de educação nas universidades europeias desde o século XVIII, é eventualmente no final do século XIX, quando a formação de professores (secundários) se tornou uma função importante e posta às universidades, que a Educação Matemática começa a ser reconhecida como matéria universitária.

Os educadores matemáticos, de acordo com Kilpatrick (1996), eram inicialmente, matemáticos preocupados com a matéria que ensinavam, e a partir dai, ocasionalmente faziam suas pesquisas relacionando a Matemática e o seu ensino. No entanto, o que era mais evidente e forte, era uma reflexão sobre os métodos de ensino da disciplina Matemática.

Neste mesmo período, ou seja, quando os matemáticos se preocupavam com as questões relacionadas à Matemática e ao seu ensino, a Psicologia configurava-se também como uma ciência e chegava com força à escola, possibilitando estudos sobre as formas como as crianças aprendiam, subsidiando o processo educacional. Nesta perspectiva, a Matemática e a Psicologia passam a compor o embrião do nova área acadêmica e científica, hoje chamada em vários países – nem todos – Educação Matemática.

Ao considerar os dois aspectos da Educação Matemática, o acadêmico e o profissional, é necesário considerar que os dois estão em interconexão, dado que, para um desenvolvimento mais frutífero desta área científica, ela precisa dialogar e apresentar, em certa medida, algumas respostas para a prática profissional. Nesta interconexão o desenvolvimento profissional carece, de alguma forma, do conhecimento especializado, que pode ser oferecido pela investigação científica e acadêmica.

Kilpatrick (1996) destaca que no início, a Educação Matemática era vista na academia como uma arte ou ocupação, sem nenhum corpo de conhecimento teórico e substantivo, que pudesse ser aplicado na formação de professores. Esta perspectiva começa a mudar, somente a partir da década de 1960, com o processo de profissionalização crescente na formação de professores em vários países. Esta profissionalização na formação de professores foi fundamental, para que a Educação Matemática pudesse alcançar o status profissional, mas é preciso ficar claro, que este não foi um caminho fácil, nem linear, mas com obstáculos e posicionamentos contrários, uma vez que, para a constituição de um novo campo científico e acadêmico, é necessário que outros campos já constituídos e postos ao longo do tempo, de alguma forma, abram alguns espaços, o que muitas vezes só é possível com embates teóricos e políticos, dentro e fora da academia, para que o novo campo seja reconhecido pelo universo acadêmico e possa se desenvolver, a partir desta. Este é um processo complexo, que mexe de forma muito singular com os espaços presentes na academia, e que já constituídos, muitas vezes se encastelam no empoderamento da ciência e do conhecimento, principalmente na universidade.

Kilpatrick (1996) argumenta que à medida que a Educação Matemática foi se tornando mais profissional, foi se tornando também mais científica, embora que essencialmente ela seja uma ciência humana aplicada, mesmo que nos seus primeiros passos, ela tenha bebido na fonte das ciências naturais.

Um período de grande desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática em todo mundo, segundo este autor, foi o que compreende a metade dos anos 1950 até a metade dos anos 1970, impulsionado pelo "Movimento da Matemática Moderna".

A gênese da Educação Matemática, a partir de Ubiratan D'Ambrósio (2004)

Na perspectiva histórica do desenvolvimento da Educação Matemática como área de pesquisa, outro importante pesquisador que vai tratar da origem desta, é D'Ambrósio (2004). Este pesquisador argumenta que a despeito de já se identificarem preocupações com o ensino de Matemática na antiguidade, é na Idade Média, com o renascimento, e nos primórdios da Idade Moderna, que o ensino de Matemática passa a ter um foco mais específico, mas reitera que, apesar destas referências, é só com a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789), que as preocupações com a Educação Matemática da juventude começam a tomar corpo efetivamente.

D'Ambrósio (2004) indica então que o período que marca a identificação da Educação Matemática como uma área da educação, é aquele situado na passagem do século XIX para o século XX, tendo como referência uma obra de John Dewey (1859-1952), que reagindo ao formalismo, propõe uma relação mais cooperativa entre estudante e professor, apresentada no seu livro "*psicologia do número"*.

Uma citação importante apontada por D'Ambrósio (2004) e que considero relevante trazer à baila, é a do cientista John Perry, quando este em 1901 reflete "*ser imensamente importante considerar a adoção de um método de ensino elementar, deve satisfazer um jovem, entre mil, que gosta de raciocínio abstrato, mas é igualmente importante que os demais não sejam prejudicados."* Esta consideração, a despeito do tempo histórico em que foi refletida e publicada, ainda faz muito sentido nos dias atuais, para se pensar a Educação Matemática como uma área profissional, que têm compromissos e responsabilidades na formação de professores e na aprendizagem matemática dos estudantes.

Apesar de citar esta consideração de John Perry em 1901, e considerar uma série de debates e embates que se seguiram nos anos posteriores, D'Ambrósio (2004), considera, que é com o eminente matemático alemão Félix Klein (1849-1925), a partir de seu livro "*matemática elementar de um ponto de vista avançado*", publicado em 1908, que a Educação Matemática dá o passo mais importante rumo à sua disciplinarização. Segundo o autor, o eminente matemático alemão defende uma apresentação que se atenha a bases psicológicas. É também no ano de 1908, sob a liderança de Félix Klein, no Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, que se dá a consolidação da Educação Matemática como uma subárea da Matemática e da Educação, constituindo-se de uma natureza interdisciplinar.

Após o Congresso de 1908, a Educação Matemática busca um espaço próprio no mundo científico e acadêmico, em várias partes do mundo, de diversas formas e por variados caminhos. Esta busca que teve aqui seu caminho sucintamente historicizado, reserva hoje à Educação Matemática, um lugar científico e acadêmico no mundo e também no Brasil, com reconhecimento acadêmico, mas com espaços institucionais ainda limitados e que precisam ser alargados, a partir da contínua, firme e decidida ação dos educadores matemáticos, que inspirados nos seus predecessores, vão trilhando o caminho, removendo obstáculos e vislumbrando novos horizontes para esta área importante da Educação no Brasil e no mundo.

Algumas reflexões sobre Educação Matemática, no encontro de Jeremy Kilpatrick(1996) e Ubiratan D'Ambrósio (2004)

Uma reflexão que gostariamos de trazer ao debate nesta comunicação, parte da afirmação de D'ambrósio (2004), quando este considera que as três grandes revoluções, a Industrial (1767), a Americana (1776) e a Francesa (1789), significaram momentos singulares, uma vez que estes acontecimentos históricos, políticos e sociais representaram preocupações com a Educação Matemática da juventude, e nestes momentos a área começa a tomar corpo efetivamente.

Concordando com este pesquisador em relação a estes três momentos e seus significados para a Educação Matemática, gostariamos de trazer reflexões para um outro momento histórico, com significados também importantes para a Educação Matemática, a partir das contribuições de Kilpatrick (1996), quando este afirma que entre as décadas de 1950 e 1970, as pesquisas em Educação Matemática tomam maior vulto.

O que queremos refletir no âmbito da comunidade Ibero Americana de Educação Matemática, é que este maior vulto destacado por Kilpatrick (1996) para a Educação Matemática, se dá, sob a nossa análise histórica dos acontecimentos, provocado por outro movimento revolucionário, que foi a Revolução Russa de 1917.

A partir desta perspectiva consideramos que esta revolução também merece figurar no rol daquelas que, de alguma forma, impulsionaram o desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática, uma vez que foi a partir da Revolução Russa de 1917 e do desenvolvimento das forças produtivas na União Soviética, sob a direção bolchevique, numa perspectiva socialista, que possibilitou em 1957, a este país, deslocar-se de uma economia basicamente agrária e de ccaraterísticas semi-feudais, em quarenta anos, para o centro da economia mundial e do desenvolvimento científico e tecnológico, ao lançar pela primeira vez na história da humanidade, um satélite artificial a circular a orbita da terra, com o foguete "Sputnik".

Este fato foi tão marcante para a ciência e a tecnologia, que desencadeou no ocidente todo um movimento de reorientação do ensino de Ciências e Matemática, sendo que na Matemática isto ficou conhecido como "Movimento da Matemática Moderna", o que segundo Kilpatrick(1996), possibilitou um maior desenvolvimento do campo da Educação Matemática. Este desenvolvimento, ao nosso ver, não se deu apenas nos Estados Unidos e parte da Europa, mas por uma série de injunões políticas e econômicas do cenário mundial, que vivia dividido em dois blocos políticos e econômicos, de um lado o bloco socialista, liderado pela Uniao Soviética e do outro lado o bloco capitalista, liderado pelos Estados Unidos, desencadeou este movimento também na América Latina.

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que, o Movimento da Matemática Moderna, introduzido com força e intensidade nos currículos escolares nas décadas de 1960 e 1970, em vários países, parece ser uma resposta encontrada pelos Estados Unidos e parte da Europa, quando da percepção e reconhecimento de que a União Soviética, estava à frente no campo da Ciência e da Matemática. Os Estados Unidos e seus aliados europeus disputavam no âmbito político, científico, cultural e bélico, uma guerra "sem tiros", que ficou conhecidada como "Guerra Fria". A vantagem da União Soviética nas pesquisas espaciais e com um grau maior de conhecimento científico e de Matemática, parece ter ficado patente quando este país lançou, em 1957, o primeiro satélite artificial a circular a orbita terrestre. Esta façanha da União Soviética, desencadeou todo um processo de busca de um maior desenvolvimento científico e tecnológico no ocidente, contribuindo significativamente para a mudança dos currículos escolares nas áreas de ciências e Matemática, o que propiciou uma maior expansão da Educação Matemática, enquanto campo de pesquisa acadêmica e reconhecida como tal.

O "Movimento da Matemática Moderna" possibilitou o surgimento de vários periódicos, novas organizações profissionais, novos institutos de pesquisa e pesquisadores, que passaram a ter a Educação Matemática como sua área de estudos e pesquisas. Este movimento foi espalhado, a partir dos Estados Unidos e de parte da Europa, para quase todos os países da América Latina, inclusive o Brasil.

O período em que o "Movimento da Matemática Moderna" chega e se desenvolve no Brasil, entre 1960 e 1980, coincide com um período histórico, político e social bastante importante do país, uma vez que se instalou em nosso país uma ditadura civil-militar, com cerceamento das liberdades democráticas e imposição do currículo nas escolas brasileiras.

Cunha (1996) nos dá uma idéia da dimensão e da extensão das restrições democráticas impetradas pelo golpe civil-mlitar no Brasil na década de 1960, ao citar um balanço sintético publicado pela impresa brasileira, logo após a posse do primeiro Presidente da República civil, após 20 anos ininterruptos de militares-presidentes: 17 atos intitucionais, 130 atos complementares, 11 decretos secretos e 2.260 decretos-leis. Congresso Nacional posto em recesso forçado por três vezes, além das cassações de mandatos parlamentares. Foram expulsas do país, por razoes políticas, 80 pessoas. Em torno de 400 pessoas foram mortas e ainda hoje, há pessoas desaparecidas. Milhares de brasileiros tiveram que deixar o país, em função de ameaças e perseguições de ordem política-ideológica.

Neste período da ditadura civil-militar no Brasil, houve um maior alinhamento polítco do Brasil com os Estados Unidos. Esta aproximação intensificou os acordos de cooperação técnica e educacional já existentes e gerou novos acordos, como por exemplo, o acordo MEC-USAID.

É muito provável que, a aproximacação política do Brasil com os Estados Unidos e os acordos de cooperação técnica e educacional entre os dois países neste período, possa ter contribuido para a difusão do "Movimento da Matemática Moderna" no Brasil e ampliado também o espaço para a área da Educação Matemática também em nosso país. Isto porque, de acordo com Kilpatrick(1996), este movimento, possibilitou um maior desenvolvimento do campo da Educação Matemática em vários países, indicando que, de acordo com levantamentos feitos na América do Norte e Reino Unido, houve um aumento exponencial de artigos e dissertações nos anos de 1960 e 1970 (Kilpatrick, 1992, pp. 27-28).

Um breve síntese sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil

A partir da década de 1950, inicia-se o movimento conhecido como Movimento da Matemática Moderna – MMM, embasado numa matemática pensada e desenvolvida pelo grupo Bourbaki, na Europa e pelo grupo SMSG nos Estados Unidos.

No Brasil, grosso modo, podemos dizer que este movimento chega com a criação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1952, e a participação de professores brasileiros em congressos, conferências e outros eventos internacionais de divulgação do MMM, que ocorrem, a partir do final da década de 1950.

No entanto, o fator de maior propagação do MMM no Brasil foi a organização e a atuação dos grupos de estudos que surgiram em tempos e formas diferentes em vários estados brasileiros – GEEM - São Paulo/SP; GEEMPA-Rio Grande do Sul/RS; NEDEM-Paraná/PR; GEMEG/GEPEM-Rio de Janeiro - RJ. Este movimento dos grupos se dá a partir da década de 1960 e levou vários estados brasileiros a incorporar o MMM, que de acordo com Wielewski (2008), pretendia aproximar a matemática escolar da matemática produzida pelos pesquisadores e trabalhada no ensino superior. A perspectiva dos adpetos do MMM era que os estudantes da escola básica pudessem facilmente lidar com esta "nova Matemática", mas isto não foi bem assim, como pensavam os entusiastas deste movimento.

Um dos primeiros trabalhos de envergadura que trata do Movimento da Matemática Moderna no Brasil é a tese de doutorado de Beatriz D'Ambrósio (1987), *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education,* defendida na Indiana University School for Education. Este trabalho enfoca que o MMM se deu no Brasil como um processo de transferência de projetos curriculares elaborados em países desenvolvidos para países do terceiro mundo. A autora destaca que um dos elementos

responsáveis por esta transferência foram as agências estrangeiras de financiamento, além da participação do Brasil nas conferências internacionais de matemática e o consequente intercâmbio de professores brasileiros com professores estrangeiros, responsáveis pela difusão do movimento.

O trabalho pioneiro de Beatriz D'Ambrósio, realizado em 1987, argumenta que os programas aqui implementados foram influenciados pelos trabalhos do grupo americano SMSG e da Europa, com trabalhos individuais de alguns autores como George e Fredérique Papy, Zoltan Dienes, Luciene Félix e Caleb Gattegno. Considera ainda Beatriz D'Ambrósio (1987), que os programas de Matemática Moderna aqui desenvolvidos tiveram pouca ou nenhuma crítica, o que possibilitou a implementação de um currículo, a partir da referência deste movimento, com algumas inconsistências, além da distância entre as ideias defendidas pelos difusores do movimento e a prática real da sala de aula, desenvolvida pelos professores. Por outro lado considera que a diminuição na ênfase da memorização e da prática de exercícios repetitivos, a preocupação com os processos de pensamento das crianças e um maior entrelaçamento de educadores e psicólogos, foram fatores importantes na implementação do MMM no país.

Considerações finais

Concluimos esta comunicação, mas não o debate e as reflexões sobre a gênese da Educação Matemática e sua trajetória. Na verdade este debate e as reflexões que dele se originam é que vai perenizando esta nossa área de estudos e pesquisas, quando ampliamos nossas fontes de investigação e buscamos outras. É quando olhamos a partir de novas perspectivas para a Educacao Matemática, que vamos ampliando seu horizonte de exploração e contribuimos para a sua vitalidade, enquanto área do conhecimento, com contribuições importantes para as ciências humanas em geral e a educação em particular.

Olhar para a Educação Matemática, a partir de uma perspectiva histórica, requer de nós um esforço teórico e metodológico, para compreendermos que esta área term interconexão com outras áreas do conhecimento e que isto é muito importante, mas ela também tem um lugar próprio na seara dos conhecimentos acadêmicos e profissionais.

A Educação Matemática que, desde o seu nascedouro, dialoga com outras áreas tem nesta perspectiva um grande potencial e desafios muito significativos, ao tempo em que não se confundindo com nenhuma das outras áreas que estabelece diálogo, vai alargando seus saberes, as suas perspectivas, as suas hispóteses e formulações. Ao dialogar com as ciências naturais e humanas, ao frequentar a escola como espaço formal de educação, mas não se limitar a este e olhando para outros horizontes educacionais, a Educação Matemática quebra limites e barreiras da produção e difusão do conhecimento.

Ao olharmos para movimentos que contribuiram para a ampliação da Educação Matemática como área do conhecimento, a exemplo do Movimento da Matemática Moderna, e a estes lançarmos novos olhares, novas perspectivas, novas experiências, possibilitamos que o campo da Educação Matemática vá se constituindo por novas descobertas e ampliando seus saberes, revendo possibilidades, descortinando véus importantes para a sua consoidação no campo acadêmico e profissional

Ao mesmo tempo, os novos olhares e as novas perspectivas encontram obstáculos e desafios, que também são novos, pois até então desconhecidos da pesquisa acadêmica, vão ao

mesmo tempo alargando caminhos, possibilitando outras vistas para questões já postas, obrigando que pesquisadores e instituições revisem seus conceitos, suas práticas e com isto dê vitalidade à ciência, para quem a verdade é sempre transitória.

Referências bibliográficas

Cunha, L. A., & GóesS, Moacyr de. (1965). *O Golpe na Educação*. Rio de Janeiro: Editora Jorge Zahar, 95 pgs.

D'Ambrósio, B. (1987). *The Dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education* (Thesis, Doctor of Philosophy). Indiana University.

D'Ambrósio, U. (2004). A educação Matemática como Disciplina. In A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. Miguel, Antonio et all. *Revista Brasileira de Educação*, *27*, Set/Out/Nov/Dez.

Kilpatrick, J. (1996). Fincando Estacas: Uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico (Tradução de Rosana G. S. Miskulin, Cármen Lúcia B. Passos, Regina C. Grando, & Elisabeth A. Araújo). *Zetetiké*, *4*(5), 99-120, jan./ jun. Campinas,

Wielewski, G. D. (2008). Políticas Educacionais e a Oficialização da Matemática Moderna no Brasil. In E. Z. Búrigo, et al. (Org.), *A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil e de Portugal: Novos Estudos*. Porto Alegre, Redes Editora.

La historia de la Matemática en libros de texto para el tercer ciclo de la educación general básica en Costa Rica durante 1949-2012

Patricia **Cortés** Campos
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
patocc.1990@gmail.com
Noemí **Lezcano** Arias
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
noemilezcano@gmail.com
Grettel **Mora** Coto
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
grettel19@hotmail.com
Miguel **Picado** Alfaro
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
miguepicado@hotmail.com

Resumen

Esta contribución aborda el uso dado a la historia de la matemática en libros de texto de secundaria editados en Costa Rica entre 1949-2012. Se diseña a partir de cinco fases: planteamiento de la investigación, selección de libros de texto y su análisis; luego se discuten y divulgan los resultados. Las fuentes son planes de estudio y libros de texto de matemáticas para primero, segundo y tercer año de secundaria. Estos últimos se han escogido a partir de criterios de selección definidos. Los resultados permiten identificar tendencias en la presentación de conceptos matemáticos, vinculados a la historia de la matemática, que caracterizan su uso en los textos según el área temática y el nivel educativo.

Palabras clave: Análisis de Contenido; Análisis Didáctico; Conceptos matemáticos; Historia de la matemática; Investigación histórica; Libros de texto

Abstract

This contribution focuses the use of history of mathematics in high school textbooks published between 1949 and 2012 in Costa Rica. It is designed from five phases: research approach, selection and analysis of textbooks, discuss and report the results. Sources are curricula and mathematical textbooks for first, second and third secondary grades. The latter have been selected from defined selection criteria. The results allow identifying trends in the presentation of mathematical concepts related to the history of mathematics. This characterizes the use of history of mathematics in textbooks by subject area and educational level.

Key words: Content analysis; Didactic analysis; History of mathematics; Historical research; Mathematics textbooks

Planteamiento de la investigación

Este estudio forma parte de una investigación que aborda el tratamiento dado a la historia de la Matemática en el currículo de matemática y los libros de texto para secundaria[1] en Costa Rica. Se delimita en el periodo comprendido entre la Fundación de la Segunda República en 1949 y la Reforma Curricular implantada por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en 2012.

Su objetivo es estudiar la historia de la Matemática como organizador curricular y eje temático y los conceptos matemáticos asociados a la historia en libros de texto para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en secundaria en Costa Rica durante el periodo expuesto. Específicamente, esta contribución describe los contenidos sobre historia de la Matemática presentes en la Normativa Curricular para el Tercer Ciclo de la Educación General Básica (EGB) e identifica y analiza conceptos vinculados a estos aspectos históricos de la Matemática en las fuentes seleccionadas (libros de texto editados en Costa Rica para tercer ciclo de la EGB entre 1949 y 2012).

Antecedentes y Marco Teórico

Desde un marco general, con la historia podemos comprender los orígenes y el desarrollo del conocimiento matemático en la sociedad (Babini y Pastor, 1997; Bell, 1992; Boyer, 2003; Collette, 1973). A través de la historia se pueden seleccionar, analizar e interpretar datos y sucesos relacionados con un concepto matemático específico. En las últimas décadas, se ha otorgado a la historia un papel relevante en la Educación Matemática como una componente curricular que promueve la interdisciplinariedad, la comprensión de las matemáticas como quehacer humano y la motivación durante el aprendizaje (Furinghetti y Somaglia, 1998; Katz, 1997; Maz, Torralbo y Rico, 2006).

Integrar la historia de las Matemáticas en la práctica didáctica, mediante la reproducción de ambientes históricos o la comprensión del origen de los conceptos, es una estrategia metodológica que permite al estudiante entender que los errores, las dudas, la diversidad de enfoques para abordar un problema y las controversias surgidas durante la apropiación de conceptos matemáticos son una parte integral del desarrollo de esta ciencia (Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004). La historia "puede presentarse mediante diversos relatos o materiales concretos que amenicen la clase, sin perder de vista uno de los propósitos claves de su utilización: evidenciar el gran lazo que por siglos ha unido la matemática con la humanidad" (Picado, 2012, p. 122). El surgimiento de nuevas tendencias en Educación Matemática, favorece la utilización de la historia en esta área y su currículo señalando la contextualización histórica, social, cultural y empírica de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza para apoyar los procesos cognitivos de los estudiantes, en los que sin duda el profesor y el libro de texto cumplen un papel fundamental.

Sobre los libros de texto y su estudio, González y Sierra (2004) destacan que,

> Su función comunicativa y de interpretación , (…) les dotará de un carácter subjetivo tanto desde el punto de vista del autor como del lector; y, (…) su estructura materializada del conocimiento, de un carácter eminentemente objetivo. Esta doble faceta de los libros de texto hace que su estudio aporte gran información tanto acerca de las concepciones en relación con

[1] Periodo que abarca las edades entre 12-17 años

> el contenido matemático que desarrollan como acerca del proceso educativo con el que están relacionados (p. 390)

En Costa Rica, los planteamientos sobre la utilización de la historia de las matemáticas son diversos y muchos de ellos son evidentes en los libros de texto. La tabla 1 expone aspectos sobre el uso de la historia de la Matemática explícitos en los documentos curriculares durante 1949-2012.

Tabla 1
Uso de la historia de la Matemática en los programas de estudio de Matemática para primer, segundo y tercer año de la EGB durante 1949-2012.

Directrices curriculares
Etapa 1949-1963
No se registran sugerencias de aspectos vinculados con la historia de la Matemática y su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje
Etapa 1964-1978
Se sugieren "bosquejos" históricos sobre el desarrollo de la Matemática y reseñas históricas sobre antiguas civilizaciones. Se deseaba que los alumnos tengan conocimiento general del desarrollo histórico de la Matemática
Etapa 1979-1994
Se exponen un mayor uso de la historia de la Matemática para la comprensión de los orígenes del conocimiento matemático. Se recomienda iniciar con una reseña histórica sobre la Matemática y sus aplicaciones, plantear diferentes actividades que establezcan una conexión entre la historia y la enseñanza de la Matemática. Entres estas, indagaciones históricas sobre algunos matemáticos, investigaciones sobre el simbolismo algebraico o el término algoritmo, construcción de tablas como la Criba de Eratóstenes, y crear ensayos sobre el origen de conceptos matemáticos o biografías.
Etapa 1995
Se propone "valorar las contribuciones de los antiguos pensadores en el desarrollo de la Matemática" (MEP, 1995, p.3). Se considera la historia como un eje transversal para la enseñanza de esta. Se promueve una visión humanista de la disciplina dentro de una construcción sociocultural del conocimiento, donde se ofrezcan recursos para actuar en el aula y se potencie la valoración de la asignatura (MEP, 2012, p.39). Se proponen estrategias como: • Elaboración de carteles sobre matemáticos o resultados matemáticos. • Proyectos extraclase, como la historia de π, conjetura de Fermat, entre otros. • Recreación dramatizada de alguna discusión matemática. • Videos de matemáticos. • Comparar pruebas de resultados de distintas civilizaciones (Teorema de Pitágoras en Euclides o en China). • Traducción de pasajes de textos matemáticos a lenguaje moderno. (MEP, 2012, pp. 66-67)

Nota. EGB = Educación General Básica.

A partir de la tabla, se reconoce un interés creciente por incorporar la historia de la Matemática en la enseñanza y el aprendizaje. La reciente reforma curricular considera la historia de la Matemática como un eje disciplinar y la describe como recurso metodológico para su enseñanza. La historia proporciona oportunidades didácticas especiales que destacan diversas formas de pensamiento y acción matemática, fortalece la multiculturalidad, las conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas, potencia la contextualización activa y sustenta una didáctica relevante. De esta forma, "el uso de la historia de las Matemáticas ofrece oportunidades valiosas para robustecer la herencia cultural de la especie humana, establecer conexión con las

humanidades y entrar en contacto con perspectivas filosóficas más generales" (MEP, 2012, p. 18).

Por otro lado Fauvel (1991), Chaves y Salazar (2003), consideran que su incorporación en los libros de texto promueve la motivación, muestra un lado más humano de la disciplina y permite superar obstáculos epistemológicos que presenten los estudiantes. También, genera en el profesor una visión amplia de cómo se desarrollaron los conceptos matemáticos y esto le permite organizar su propio currículo para presentar los contenidos de forma más ordenada.

Las investigaciones basadas en el análisis de libros de texto responden a diversas circunstancias que suceden durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y han tomado el interés de los investigadores en las últimas décadas (Carrillo, 2005; Maz, 2005; Picado, 2012). Estos destacan particularidades conceptuales y didácticas sobre conceptos matemáticos específicos en distintos contextos (Fauvel y Gray, 1991).

Estas consideraciones forman parte de los fundamentos y motivaciones que conducen a estudiar la presencia y el uso dado a la historia de la Matemática en libros de texto en un periodo determinado de la Educación Matemática costarricense.

Diseño y metodología

El estudio se enmarca dentro de las investigaciones cualitativas-descriptivas en historia de la Educación Matemática, basadas en el análisis de libros de texto históricos de matemáticas. Se diseña a partir de cinco fases: planteamiento de la investigación, selección de las fuentes, análisis de las fuentes, discusión y resultados, y comunicación de resultados (Picado, 2012). Se destacan las fases de selección y análisis de las fuentes.

Selección de las fuentes

Las fuentes son libros de texto editados en Costa Rica, durante el periodo 1949-2012, dirigidos a la enseñanza de las matemáticas en el tercer ciclo de la EGB (tres primeros años de secundaria, 12 a 15 años).

Para su selección se han definido criterios, organizados en fases de selección. Primero, criterios mínimos que consideran las diferencias en producción de libros de texto en las primeras etapas y la cuarta etapa. Incluyen: asignatura y población meta, fecha de edición, disponibilidad y representatividad del libro de texto, nivel académico y contenido del texto. La representatividad de las fuentes en el periodo se llevó a cabo a partir de cuatro etapas históricas. Las etapas se definen a partir de situaciones políticas y educativas en la historia de Costa Rica durante 1949-2012. Estas se han denominado: promulgación constitucional (1949-1963); implementación de las matemáticas modernas (1964–1979); implementación de la conceptualización de los procesos de enseñanza y aprendizaje (1980–1994); y, modernización de conceptualizaciones de los procesos de enseñanza y aprendizaje (1995–2012).

La segunda fase consideró un criterio específico para reducir el número de libros encontrados en la cuarta etapa histórica: editorial. Los libros de texto se han localizado en las bibliotecas de la sede Rodrigo Facio de la Universidad de Costa Rica, bibliotecas públicas, bibliotecas de instituciones educativas de secundaria y bibliotecas personales de los investigadores.

Análisis de las fuentes

Esta fase se llevó a cabo desde el Análisis Didáctico, particularmente del Análisis de Contenido (Picado y Rico, 2011; Picado, Gómez y Rico, 2013). Desde esta perspectiva, el análisis de contenido permite identificar la estructura conceptual, las representaciones y situaciones en que se muestran los conceptos matemáticos. Para esta contribución el análisis enfocarán los conceptos matemáticos relacionados con aspectos históricos presentes en los libros de texto.

Dadas las características del estudio, y considerando la metodología de las investigaciones previas (Picado, 2012), se establecen y adaptan categorías de análisis para caracterizar el contenido de los libros de texto. Estas categorías y unidades de análisis organizan y describen los aspectos históricos vinculados a conceptos matemáticos presentes en cada libro de texto.

Este informe presenta un avance de la caracterización del contenido de los libros de texto. Muestra los resultados sobre las categorías Preliminares (CC-PE) y Conceptos (CC-CP) que forman parte de la categoría sobre el contenido del libro de texto (CC). En preliminares, considera la presencia de datos, pasajes y hechos históricos sobre las matemáticas. La segunda, pretende resaltar aquellos conceptos matemáticos abordados desde la historia de la Matemática a partir de los preliminares (CC-PE).

Discusión y resultados

A continuación, se presentan los datos y resultados del análisis de los libros de texto. La información sobre las categorías se sintetiza en las tablas 2 y 3.

Sobre los preliminares

Curricularmente, durante las tres etapas primeras, la historia de la matemática no constituía un elemento de la enseñanza, dejando de lado su vínculo con la sociedad y el desarrollo humano. La tabla 2 expone estos resultados.

Los resultados evidencian que los libros de texto para primero, segundo y tercer año de secundaria, editados durante 1949-1963, muestran un uso de la historia de la Matemática como componente de la introducción para un capítulo o área temática. La presentación de prólogos es escasa en algunos documentos. Esto podría justificar que no se reconozcan aspectos históricos en estos apartados.

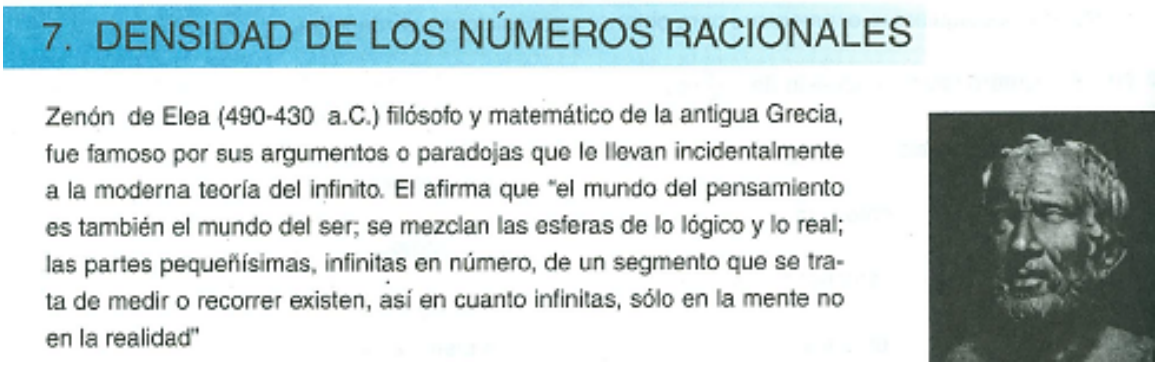
Tabla 2
Preliminares sobre el uso de la historia de la Matemática presente en los libros de texto.

Libro de texto	Prólogos	Introducción de capítulo	Introducción de tema	Impacto social
		Etapa I		
Lecciones de Matemáticas para I año		x	x	
Lecciones de Matemáticas para II año				
Matemática para la escuela secundaria		x		
		Etapa II		
Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Libro Primero	x		x	

Libro de texto	Prólogos	Introducción de capítulo	Introducción de tema	Impacto social
Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Libro Segundo (primera parte)				
Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Libro Tercero Capítulo 2°			x	
	Etapa III			
Matemática Activa 7°		x		
Matemática elemental. 8° año		x	x	x
Matemática elemental. 9° año		x	x	
	Etapa IV			
Matemática 7°. Enseñanza-aprendizaje		x	x	
Matemáticas 8°		x		
Matemáticas 9°			x	

Nota. Elaboración propia.

Los textos editados en la etapa I muestran un uso discreto de la historia de la Matemática. A partir de 1964 se da un cambio en la enseñanza de la Matemática en las escuelas secundarias costarricenses. Se reestructuran los programas de estudio y se elaboran libros de texto que darán inicio a la Reforma de la Matemática para la Enseñanza Media en Costa Rica. Así, la incorporación de la historia de la Matemática se evidencia en los programas de estudio y en los libros de texto que responden a estos programas. Se destaca el avance progresivo en la incorporación de aspectos históricos al introducir un tema. La figura 1 muestra registros biográficos en la introducción al tema sobre la densidad de los números racionales.



7. DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Zenón de Elea (490-430 a.C.) filósofo y matemático de la antigua Grecia, fue famoso por sus argumentos o paradojas que le llevan incidentalmente a la moderna teoría del infinito. El afirma que "el mundo del pensamiento es también el mundo del ser; se mezclan las esferas de lo lógico y lo real; las partes pequeñísimas, infinitas en número, de un segmento que se trata de medir o recorrer existen, así en cuanto infinitas, sólo en la mente no en la realidad"

Figura 1. Introducción a tema (Meneses, 1996, p. 198)

Otra unidad de análisis con más representatividad es la introducción a un capítulo o unidad temática. Por ejemplo, en el texto de primer año de la etapa III, se destaca en la introducción de la unidad el "Sistema Internacional de Unidades" subrayando el concepto de medida.

> La necesidad de medir ha estado presente en las actividades del hombre en la historia. En la antigüedad, las unidades de medida se referían a dimensiones corporales del hombre. Así los egipcios, utilizaron como unidad de medida la braza, equivalente a la distancia entre los extremos de los dedos medios con los brazos extendidos y el codo, equivalente a la distancia entre el codo y el dedo medio. Los griegos utilizaron el codo olímpico, que mide

> aproximadamente 463 mm y lo dividen en dos palmos, cada palmo en tres palmas y cada palma en cuatro dedos (p. 135).

Por su parte, los conceptos mencionados en estos preliminares se vinculan a matemáticos representativos del concepto, a sus orígenes y usos en ciertos contextos como el caso de los signos de suma y resta (figura 1).

Sobre la categoría impacto social, los libros de texto analizados muestran que la mayoría de autores no dejaron evidencias textuales —como comentarios u opiniones— acerca del uso y utilidad de la historia de la matemática para aprender esta disciplina.

Sobre los conceptos

En los libros de texto se identifica una variedad de conceptos matemáticos asociados con hechos históricos. La tabla 3 muestra estos conceptos.

Tabla 3
Conceptos vinculados a la historia de la matemática por etapa y nivel académico.

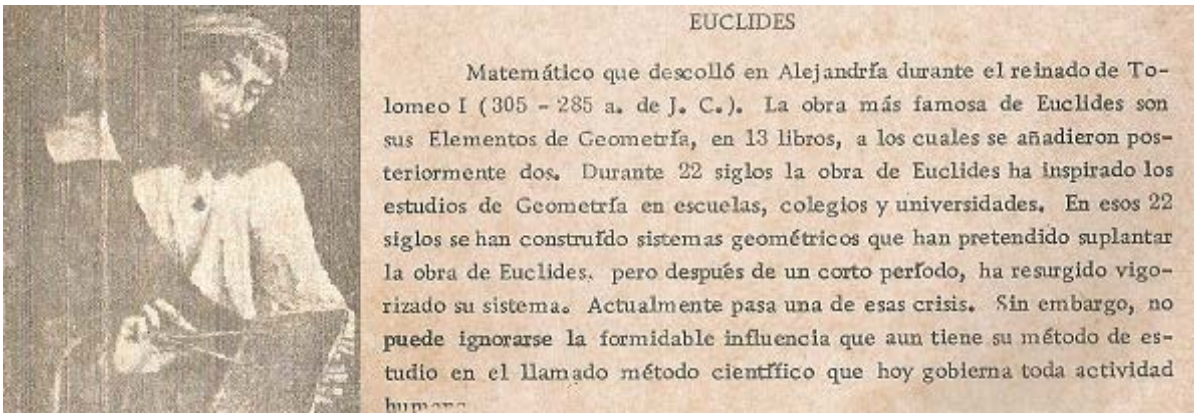
Etapa I	Etapa II	Etapa III	Etapa IV
		Primer año	
Aritmética: Número, número primo, medida, unidades de medida, factor, divisor, multiplicación, operaciones fundamentales.	**Aritmética**: Cantidad, número, representación numérica, número primo, número racional, razones y proporciones. Operaciones básicas.	**Aritmética**: Números (racionales e irracionales), número, divisor, múltiplo y factor de un número natural, medida, unidades de medida.	**Aritmética**: Medida, número (natural, negativo, primo, compuesto, infinito, cero), fracción, densidad, suma, resta, multiplicación, división, potencia, radical, conteo, signo de suma y de resta, exponente (negativo, fraccionario), signo de raíz, raíces cúbicas, fracción, fracción positiva, símbolos de multiplicación y división, conjunto, conjunto infinito, logaritmo, **Geometría**: triángulo, cuadrado, cuadrilátero, área, círculo, circunferencia, ángulo, recta, rectas paralelas, transversal a dos rectas paralelas **Estadística**: censo, datos, conteo, inventario.
		Segundo año	
Geometría: Recta, Rectas paralelas	**Aritmética:** Números infinitos, números algebraicos, número π conjunto, conjunto no numerable, infinito, Diagrama de Venn, número, infinito, constante	**Aritmética:** número, (natural, negativo, racional), medida, distancia, suma, multiplicación, división, potencia, número fraccionario positivo y negativo, fracciones, raíz, tabla de multiplicar, sistema de medición.	**Aritmética:** razón, proporción, número (positivo y negativo), notación exponencial **Geometría:** figuras semejantes, altura de la pirámide, **Álgebra:** ecuación de primero y segundo grado, sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, símbolo algebraico, **Función:** incógnita, variable, constante

Etapa I	Etapa II	Etapa III	Etapa IV
	Euleriana, **Geometría:** área, volumen, y esfera, sistema geométrico, perímetro, línea de Euler, **Algebra:** ecuación de Euler, variable Euleriana.	**Geometría:** área, círculo, triángulo y cuadrado, distancia, recta, área, triángulo, triángulo rectángulo, perímetro, circunferencia, diámetro, cuadrado, círculo, sólidos, cilindro, cubo **Álgebra:** expresión algebraica, símbolo, ecuación, producto notable. **Estadística:** conteo	
		Tercer año	
Aritmética: número irracional, potencia, suma, radical, **Geometría:** Triángulo rectángulo, **Álgebra:** ecuación.	**Geometría:** Triángulo rectángulo, rectas (paralelas y perpendiculares), ángulo recto, segmentos congruentes, semejanza de triángulos, secante.	**Aritmética:** número (racional, irracional y real), operaciones básicas, radical, **Álgebra:** Incógnita, ecuación, expresión algebraica, **Función:** variable dependiente e independiente **Geometría:** triángulos pitagóricos, sección cónica, gráfico de funciones, triángulo rectángulo (áureo), coordenadas rectangulares, **Trigonometría:** razones trigonométricas.	**Aritmética:** número (natural, impar, entero, π) cifra, sucesor, suma, resta, multiplicación, división, proporción **, Álgebra:** sistemas de ecuaciones, **Geometría:** figuras semejantes, rectas paralelas, , segmento, transversal, terna pitagórica, triángulo rectángulo, altura del triángulo sobre la hipotenusa, ángulos agudos, cuadrado, sector parabólico, plano cartesiano, **Función:** función.

Nota. Elaboración propia

En los textos para primer año, se identifica un aumento en la incorporación de conceptos relacionados a la historia de la Matemática conforme pasan las etapas históricas. Se incorporan conceptos en mayor medida del área de aritmética y geometría. Las etapas III y IV evidencian mayor variedad de conceptos vinculados a la historia de la Matemática, variando en menor medida en otras áreas de la matemática. En funciones, por ejemplo, se menciona los conceptos de variable dependiente e independiente; en álgebra, los conceptos de incógnita, ecuación de primero y segundo grado, sistemas de ecuaciones, sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

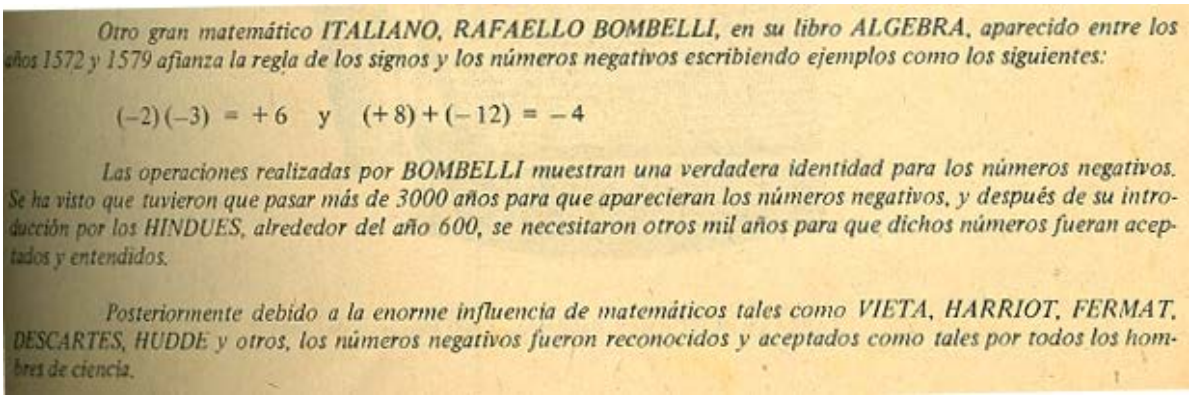
Para segundo año se destaca una mayor variabilidad entre los conceptos vinculados con la historia de la Matemática en las etapas II, III y IV. Entre los conceptos presentados en los libros de texto, se muestra el postulado de las rectas de Euclides (figura 2). La figura 3 presenta el concepto de número negativo.



EUCLIDES

Matemático que descolló en Alejandría durante el reinado de Tolomeo I (305 - 285 a. de J. C.). La obra más famosa de Euclides son sus Elementos de Geometría, en 13 libros, a los cuales se añadieron posteriormente dos. Durante 22 siglos la obra de Euclides ha inspirado los estudios de Geometría en escuelas, colegios y universidades. En esos 22 siglos se han construído sistemas geométricos que han pretendido suplantar la obra de Euclides, pero después de un corto período, ha resurgido vigorizado su sistema. Actualmente pasa una de esas crisis. Sin embargo, no puede ignorarse la formidable influencia que aun tiene su método de estudio en el llamado método científico que hoy gobierna toda actividad humana.

Figura 2. Biografía de Euclides (Alfaro, 1964, p. 164)



Otro gran matemático ITALIANO, RAFAELLO BOMBELLI, en su libro ALGEBRA, aparecido entre los años 1572 y 1579 afianza la regla de los signos y los números negativos escribiendo ejemplos como los siguientes:

$(-2)(-3) = +6$ y $(+8)+(-12) = -4$

Las operaciones realizadas por BOMBELLI muestran una verdadera identidad para los números negativos. Se ha visto que tuvieron que pasar más de 3000 años para que aparecieran los números negativos, y después de su introducción por los HINDUES, alrededor del año 600, se necesitaron otros mil años para que dichos números fueran aceptados y entendidos.

Posteriormente debido a la enorme influencia de matemáticos tales como VIETA, HARRIOT, FERMAT, DESCARTES, HUDDE y otros, los números negativos fueron reconocidos y aceptados como tales por todos los hombres de ciencia.

Figura 3. Concepto de número negativo (Barahona y Rodríguez, 1987, p. 47)

La trigonometría y la estadística constituyen las áreas de la matemática con menor presentación de conceptos mediante el uso de la historia. La tabla 4 organizan los conceptos matemáticos con vínculos históricos mostrados en los libros de texto analizados según el área de las matemáticas y el nivel educativo.

Tabla 4
Conceptos matemáticos vinculados a la historia de la Matemática

Primer año	Segundo año	Tercer año
	Aritmética	
Razones y proporciones, Número (primo, natural, racional, irracional, negativo, positivo, fraccionario), unidades de medida, operaciones fundamentales, signo de raíz, raíz cúbica, fracción, divisor múltiplo, factor, medida, conteo, tabla de multiplicar, sistema de medición, raíz, potencia, exponente, positivo y fraccionario, logaritmo.	Número, número (natural, negativo, racional, infinito, algebraico, racional, π), conteo, medida, suma, multiplicación, división, potencia, tabla de multiplicar, fracciones, sistema de medición, símbolo, número fraccionario positivo y negativo, ecuación, raíz, constante Euleriana.	Número, operaciones básicas, radical, número racional, irracional y número real. Números (enteros, impar, natural, π), cuadrado, sucesor, resta, suma multiplicación, división, cifra, proporción.

Primer año	Segundo año	Tercer año
	Álgebra	
	Ecuaciones, expresión algebraica, símbolo, notación exponencial, ecuación de Euler y variable Euleriana.	Incógnita, ecuación de primero y segundo grado, sistemas de ecuaciones, sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, expresión algebraica.
	Geometría	
Triángulo, cuadrado, círculo, circunferencia, ángulo, recta, rectas paralelas, transversal a dos rectas paralelas, cuadrilátero, área.	Rectas paralelas, área, volumen, esfera, distancia, figuras semejantes, sistema geométrico, perímetro, círculo, triángulo y cuadrado, recta, triángulo rectángulo, circunferencia, diámetro, sólidos, cilindro, cubo, altura de la pirámide, línea de Euler.	Triángulo rectángulo, secciones cónicas, altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Terna pitagórica, rectas (paralelas y perpendiculares), secante, ángulo (recto y agudo), segmentos congruentes, semejanza de triángulos, coordenadas rectangulares, rectas paralelas, segmento, transversal, plano cartesiano.
	Funciones	
	Incógnita, constante, variable.	Incógnita, gráfico de una función, coordenadas rectangulares, variable dependiente e independiente, plano cartesiano.
	Trigonometría	
		Razones trigonométricas
	Estadística y probabilidad	
Censo, datos, conteo, inventario.		

Nota. Elaboración propia

Como se aprecia, aritmética y geometría presentan en los textos un mayor número de conceptos asociados a la historia. Las áreas de álgebra y funciones presentan esta tendencia (en menor grado) en los niveles en que curricularmente son abordados.

En aritmética, sobresale la presentación de conceptos básicos como número (natural, entero, racional, irracional, primo, negativo, positivo, algebraico) y medida. También, el uso de la historia enmarca los sistemas de numeración, las razones y proporciones, y las operaciones básicas. En geometría, la presentación de conceptos mediante aspectos históricos destaca los aportes de matemáticos ilustres. Por ejemplo, el concepto de triángulo rectángulo se asocia a Pitágoras y las razones y proporciones a Thales de Mileto. Por su parte, la presentación de la recta se vincula a Euclides, Mobiüs y Eratóstenes. Este último resalta con los conceptos de circunferencia, rectas paralelas y transversales.

Conclusiones

Los contenidos de aritmética y geometría en los libros de texto muestran una tendencia predominante en cuanto al uso de elementos históricos para presentar los conceptos.

Generalmente, esta incluye referencias históricas sobre el concepto, su origen y desarrollo, o sobre algún matemático reconocido al que se vincula con el concepto.

Los programas de estudio de matemáticas de la etapa I carecen de indicaciones sobre el uso de la historia de la Matemática en su enseñanza y su aprendizaje. Sin embargo, se reconocen en los libros de texto de esta etapa algunos elementos históricos al presentar determinados conceptos. Esto concuerda con la especificidad curricular reconocida a los manuales escolares y libros de texto con relación a los programas o planes de estudio.

Contrariamente, los programas de estudios de la segunda etapa sugieren realizar bosquejos y reseñas históricas sobre las matemáticas. No obstante, su presencia en los libros de texto analizados es escasa.

El incremento de las directrices curriculares sobre el uso que se debe dar a la historia de la matemática durante su enseñanza se acentúa a partir de 1980. Los libros analizados registran este uso mediante la exposición de elementos históricos en la introducción de capítulos o unidades temáticas, el desarrollo de algunos conceptos matemáticos y la presentación de su utilidad en distintas esferas sociales.

Durante la etapa IV, se identifica un uso mayor de la historia de la matemática, tanto en las propuestas curriculares como en los libros de texto. La presentación de variados elementos históricos para desarrollar las diferentes unidades temáticas sustenta esta afirmación.

El uso de la historia para presentar determinados conceptos matemáticos, en los libros de texto en Costa Rica durante 1949-2012, se caracteriza según el área de las matemáticas y el nivel educativo. Su presencia en los libros de texto, en este periodo, ha sido constante a pesar de los vacíos curriculares para su utilización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en determinados momentos.

Prospectiva

Esta investigación pretende describir la incidencia de las directrices curriculares sobre el uso de la historia de la matemática en los libros de texto en el periodo descrito. El estudio continuará con la caracterización de las formas utilizadas para representar los conceptos matemáticos asociados a elementos históricos, los diferentes contextos que muestran su utilidad y los tipos de tareas matemáticas que incorporan estos elementos. Esto desde la perspectiva del Análisis Didáctico.

Referencias

Alfaro, B. (1965). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Segundo Libro*. *Primera Parte*. Costa Rica: BAS.

Babini, J. y Pastor, J. (1997). *Historia de la Matemática*. Barcelona, España: Gedisa.

Barahona, M. y Rodríguez, P. (1987). *Matemática Elemental 8° año*. San José, Costa Rica: Alma Mater.

Bell, E. T. (1992). *Historia de las matemáticas* (R. Ortiz, Trad.). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza.

Carrillo, D. (2005). *La metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus* antecedentes. Murcia, España: Universidad de Murcia.

Chaves, E y Salazar, J. (2003). *La historia de la matemática como recurso metodológico en los procesos `de enseñanza-aprendizaje de la matemática.* Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/download/109/102

Collette, J. P. (1973). *Historia de las matemáticas*. México DF, México: Romont.

Farmaki, V., Klaudatos, N. y Paschos, T. (2004). Integrating the history of mathematics in educational praxis. An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *PME 28. Vol. 3* (pp. 505-512). Bergen, Noruega: PME.

Fauvel, J. (1991) Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 13-16.

Fauvel, J. y Gray, J. (1991). *The history of mathematics: a rea*der. Hong Kong, China: Macmillan Press-The Open University.

Furinghetti, F. y Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School, 24*(4), 48-51.

González, M y Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el Siglo XX*. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21990/21824

Katz, V. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 62-63.

Maz, A. (2005). Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado: una mirada desde la educación matemática*. Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Meneses, R. (1996). *Matemática 7° Enseñanza-aprendizaje*. San José, Costa Rica: Norma.

Ministerio de Educación Pública. (1995). Programa de Estudios: Matemática III Ciclo. San José, Costa Rica: Autor.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemática*. San José, Costa Rica: Autor.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Picado, M., Gómez, B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del sistema métrico decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, Formación de Profesores e innovación curricular* (pp. 403-414). Granada, España: Comares.

Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA 6*(1), 11-27.

A Matemática nas escolas dos Jesuítas no Rio Grande do Sul

Silvio Luiz Martins **Britto**
Faculdades Integradas de Taquara, Universidade Luterana do Brasil
Brasil
brittosilvio@uol.com.br
Arno **Bayer**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
bayer@ulbra.br

Resumo

O artigo trata de uma investigação sobre a Matemática sob a optica dos jesuítas no Rio Grande do Sul, desde a retomada da ordem nesse Estado em 1844. Objetiva-se investigar suas contribuições no ensino e aprendizagem da Matemática. Inicialmente analizou-se a realidade educacional no Rio Grande do Sul e as contribuição dos Jesuítas na organização das escolas paroquiais, através do projeto de restauração católica onde objetivam uma proposta pedagógica comum em todas escolas. Num segundo momento destacou-se a Matemática e quais conhecimentos eram necessário que o aluno dominasse para o seu dia-a-dia, contemplando a sua realidade. Num terceiro momento, identificaram-se os recursos didáticos utilizados para trabalhar esses conteúdos. Analisaram-se livros didáticos de aritmética, pontuando orientações metodológicas, indicações e irformações referente a esses livros. Finalizando, destacamos uma das escolas dos jesuítas, o Ginásio Conceição, objetivos, equiparação ao Ginásio Nacional, e fatores que ocasionaram o encerramentos de suas atividades.

Palavras chave: história da matemática, educação matemática, manuais didáticos educação jesuítica, ensino e aprendizagem da matemática, escola paroquial.

Introdução

A História da Matemática e a Educação Matemática têm assumido um importante papel nos últimos tempos, seja enquanto fonte de pesquisas científicas, seja como método de abordagem ou auxílio nos trabalhos com os conteúdos matemáticos em sala de aula. Sendo assim, merecedora de muitas discussões em diversos eventos científicos em todo o mundo.

Diante disso, pretendemos, com este projeto de pesquisa, estabelecer uma panorâmica da educação matemática na região sul do país nos séculos XIX e XX sob a ótica dos Jesuítas, desde a retorno dessa ordem a essa região do país e quais as suas contribuições junto aos núcleos coloniais no interior do Rio Grande do sul, através do projeto de restauração católica de ensino e de formação do povo. Pois, quando aqui chegaram logo se aliaram às comunidades e com as escolas, ao professor, para desenvolverem a sua atividade pastoral.

O tema em questão apresenta as contribuições dos jesuítas voltadas à organização escolar nas colônias teuto-brasileiras. Eles foram os mentores de um projeto curricular que garantiu o bom êxito dessas escolas ao longo de várias décadas.

Num primeiro momentos, essas escolas objetivavam oportunizar condições necessárias para que os filhos de colonos aprendessem a ler escrever, fazer contas e, sobretudo, para receberem instruções religiosas suficientes, a fim de poderem viver uma vida cristã. Portanto, através dados dessas escolas, pretende-se investigar quais foram seus objetivos, e em especial no campo da Matemática, quais os recursos metodológicos eram utilizados para atingir esses objetivos e quais os conteúdos de Matemática eram trabalhados durante as aulas.

Num segundo momento, buscou-se identificar os livros didáticos de Matemática usados nessas escolas, quais conteúdos e seus autores e principalmente os mecanismos e as estratégias de ensino dessas escolas.

Para que a investigação se torne mais abrangente, investigamos uma importante escola administrada pelos Jesuítas no sul do Brasil, o Ginásio Nossa Senhora da Conceição, em São Leopoldo, seus objetivos, conquistas e quais fatores ocasionaram o encerramento de suas atividades nesta cidade.

A formação Matemática no Rio Grande do Sul

> Durante muito tempo o Rio Grande do Sul permaneceu, sem a devida atenção, quanto à formação de seu povo. As primeiras escolas que surgiram em território rio-grandense foram as que resultaram do trabalho desenvolvido pelos jesuítas espanhóis, que fundaram escolas de ler, escrever e contar, nas reduções jesuíticas[1]. Junto às igrejas dessas reduções, os padres da Companhia de Jesus faziam erguer uma peça ampla para a escola e a frequência à mesma era obrigatória para as crianças em idade escolar.
>
> Na organização dos sete povos das missões havia escolas onde as crianças aprendiam a ler escrever, contar, música e danças religiosas. Os professores eram índios com cultura superior a comum e com especial inclinação para o ensino. Frequentavam essas escolas os filhos de caciques, dos vereadores, dos músicos, dos sacristãos, dos mordomos e dos oficiais mecânicos, que constituíram a nobreza do povo, e os filhos dos demais índios, quando isso era solicitado pelos pais. (Schneider,1993, p.7).

Segundo a autora, com o tratado de Madri, 1750, houve a guerra Guaranítica, a destruição dos sete povos e a retirada dos jesuítas para o lado espanhol, não havendo substitutos para o trabalho educativo que haviam realizado.

A retomada da Ordem no sul do país, foco desta investigação, verificou-se em 1844, segundo Schmitz (2012, p.2),

> A missão aqui no sul surge porque os Jesuítas se desentenderam com o governo da Argentina, mais especificamente no tempo de Rosa. Este fato observa-se no Uruguai, eram Jesuítas espanhóis, eles tiveram que fugir. Então, saíram do Uruguai, vieram para Porto Alegre. A primeira coisa que o Bispo fez foi recebê-los no seminário que está atrás da Catedral, ficando um ou dois anos. Eles viram que havia aqui muitos colonos alemães e católicos que não tinham nenhuma assistência espiritual.

Voltando ao Brasil, ao chegarem a Porto Alegre, expulso da Argentina, devido o fato de não apoiarem um partido, perceberam que na região haviam muitos imigrantes alemães,

[1] Sistema implantado pelos Jesuítas na América do sul com o objetivo de converter os índios Guaranis à fé Cristã, na margem oriental do rio Uruguai, onde lhes ensinavam os princípios do Evangelho, que tinha o poder de adestrar os nativos para o trabalho organizado.

católicos, recém chegados da Europa desprovidos de qualquer tipo de assistência espiritual, o que tornaria um campo fértil para o trabalho missionário.

A chegada dos padres Jesuítas alemães verificou-se no ano de 1848 ocasionando uma intensa relação com os imigrantes alemães nas diferentes comunidades no Rio Grande do Sul e posteriormente nos demais Estados da região sul do país.

Em relação ao sistema de ensino, a realidade aqui encontrada era bem diferente da Alemanha. La a educação já fazia parte da cultura deste país, nos seus diferentes Estados. No Brasil era muito precário com um número reduzido de escolas. Vale ressaltar que antes da chegada dos Jesuítas, os imigrantes já haviam criado escolas, onde o ensino era basicamente o que deveria ser necessário e indispensável para a vida do colono.

A partir da segunda metade do século XIX, começaram-se intensificar os esforços visando à melhoria da instrução nessas regiões, e isso se deve, principalmente a chegada dos Jesuítas junto às comunicadas de imigrantes, através de um projeto de restauração religiosa e política conservadora junto aos imigrantes e seus descendentes, por meio da conquista de espaços na organização e na difusão da imprensa, da escola, e da criação de uma rede de organizações religiosas, econômico sociais, recreativas e culturais[2].

Inicialmente o ensino era somente em alemão, mas, com o passar do tempo, começou-se a ensinar o alemão, juntamente com o português, com o objetivo de facilitar a comunicação dos imigrantes com os nativos e as demais autoridades. Sob a orientação dos padres jesuítas, os professores empregavam os recursos que tinham à mão, tais como: quadro-negro, mapas, gravuras, entre outros.

O ensino visava à vida prática, cotidiana, do filho do imigrante. Por isso, a tabuada constituía um ponto alto. Sabê-la prontamente, de 1 a 20, era questão de honra. O professor treinava os alunos para fazerem "cálculos de cabeça" (Kopfrechnungen), sem recorrer à lousa.

As aulas eram ministradas, geralmente, num único turno, com preferência pela manhã. Esse fato explica-se que a tarde é mais longa, permitia aos filhos dos colonos maior participação nos trabalhos da lavoura.

Segundo Bohnen (1989) as disciplinas lecionadas nessas escolas, eram as seguintes:

- Religião: 6 horas

- Língua: 8 horas

- Matemática: 6 horas

- Realia[3]: 2 horas

- Recreio: 20 minutos cada dia, o que perfaz duas horas semanais para vinte e duas de aula. O currículo exposto abrange 24 horas por semana, com aulas, portanto, aos sábados pela manhã.

[2] Cf. Kreutz, 1994, p.22-23. A rede de organizações econômico-sociais, recreativas e culturais, postas sob o primado do espiritual, foi estimulada pelos jesuítas, a exemplo das comunidades agrárias do Hunsrück.
[3] Realidades (do Latim Realia = coisas objetivas) são cosas reais, isto é, fatos reais. No contexto escolar englobavam a Geografia, a Ciência Natural, (Física e História Natural). (Cf. Rambo, 1994, p.138).

O controle e a supervisão constante dos padres jesuítas garantiram o bom êxito das escolas. Portanto, as escolas elementares preenchiam as condições necessárias para os filhos de colonos aprenderem a ler, escrever, fazer contas e, sobretudo, para receberem instruções religiosas suficientes, a fim de poderem viver uma vida cristã. Porém, com o passar do tempo, o ensino elementar já não se mostrava satisfatório para muitos.

Para atender às aspirações dos jovens colonos, os padres jesuítas criaram escolas de formação ou complementares. Ressaltando que, o objetivo destes educandários era formar bons professores para ministrar aulas nas picadas.

Até 1900 as escolas teuto-brasileiras no Rio Grande do sul apresentavam um currículo variado, alterando de acordo com as circunstâncias, possibilidades e organizações de cada comunidade. A freqüência escolar limitava-se, em muitos casos em um ou dois anos, prolongando-se a três e quadro anos nas décadas de 1880/90, exigência dos padres para a realização da Primeira Eucaristia. Quanto aos conteúdos trabalhados estes eram estritamente os necessários, sendo estabelecido um conteúdo mínimo. Segundo Kreutz (1994, p.39) era observado "aprendizado da leitura e da escrita, história bíblica, catecismo (religião) e os fundamentos de matemática aplicados ao cotidiano". Estes conteúdos mínimos eram quase que rigorosamente observados, pois estes eram o que os imigrantes esperavam obter da escola.

No campo da Matemática, os alunos deveriam saber fazer todos os cálculos necessários para a vida, a vida de colono. Como por exemplo, realizar cálculo de juros (simples e composto), regra de três, inclusive cálculos de volumes, sendo que isso acontecia de forma prática. Portanto era uma maneira prática encarnada no meio e adaptada às circunstâncias e necessidades locais. O objetivo fundamental da Matemática era, que as crianças saíssem de lá com os conhecimentos suficientes para fazer todos os cálculos, ou seja, o que eles precisavam no seu dia-a-dia, na administração da casa e na sua propriedade.

Segundo Kreutz (1994, p.23-24),

> [...] o material escolar deveriam partir sempre da realidade dos alunos, concorrendo para uma inserção mais ativa nessa mesma realidade. Houve ampla produção de material didático elaborado especialmente para a escola teuto-brasileira, e os alunos eram efetivamente alfabetizados, dominando os elementos básicos da escrita, da leitura, e das operações matemáticas, além do engajamento nas estruturas comunitárias.

Diante disso, para uma maior organização do currículo e dos conteúdos a serem trabalhados, em 1898 laçou-se a ideia da fundação do *Lehrerverein*[4] católico, liderada pelos jesuítas e que tinha entre outras iniciativas a formação e o aperfeiçoamento dos professores.

Essa associação criou um jornal-revista, a *Lehrerzeitug*[5], onde se promoviam encontros regionais, semanas de estudos referentes a novos métodos de ensino. Dados referentes ao currículo das escolas católicas são apresentados nos primeiros números do *Leherzeitung*, elaborados por Matheus Grimm.

[4] Cf. Kreutz, 1991, p.108. Lehrerverein, associação dos professores paroquiais católicos teuto-brasileiros no Rio Grande do sul.

[5] Cf. Kreutz, 1991, p.118. Lehrerzeitug, jornal dos professores, ou jornal revista, sendo este o instrumento de maior significado e o mais eficiente para alcançar os professores nas comunidades rurais, fornecendo-lhes subsídios didáticos e mantê-los em sintonia com o Lehrerverein.

Até a década de 1890 os imigrantes utilizavam, majoritariamente, em suas escolas, os livros por eles trazidos, elaborados e impressos na Alemanha. No entanto, esses manuais passaram a ser considerados inadequados por não satisfazer as necessidades brasileiras, pois não eram elaborados a partir da realidade teuto-brasileira e até mesmo voltados aos objetivos desta escola. Portanto, era necessário a elaboração e utilização de um material próprio, pois, a realidade aqui era diferente a da Alemanha, tais como: a fauna, flora, campos, alimentação, estações do ano, lições de aritmética, Geografia, história, entre outros.

Ao analisarmos alguns livros de Matemática, da época, no Instituto Ancietano de pesquisa, São Leopoldo RS, observou-se o livro "Arithmetica Elementar" (Büchler,1919), no qual verifica-se a preocupação do autor, no seu prefácio, em relação ao ensino de Aritmética no país, principalmente no que se refere ao fato de como ela é apresentada aos alunos principiantes.

Segundo ele, era necessário um compêndio de Aritmética que auxiliasse a criança na transição da vida familiar para a vida escolar, aproveitando e desenvolvendo os seus conhecimentos pré-escolares.

Contudo, observa-se a preocupação do autor em relação à inserção do aluno na vida escolar de forma prazerosa e com significados. Há certa inquietude referente a essa fase, uma vez que o autor enfatiza a necessidade do aluno passar por uma vida pré-escolar para a vida escolar, propriamente dita, sendo condição primordial estabelecer uma fase de transição entre uma e outra. Essa visão do autor pode ser vista no nosso dia a dia, pois, no sistema de ensino vigente, se verifica um currículo básico de nove anos e uma fase pré-escolar em que a criança, gradativamente, vai sendo inserida no processo de escolarização.

Pode-se observar, segundo o autor, a preocupação em relação à necessidade de minimizar esse impacto quanto à inserção da criança na escolarização.

> Neste livro, como vai se ver, propusemo-nos nortear a aprendizagem de arithmetica tendo sempre em vista que o espírito infantil só é capaz de noções concretas pela intuição directa, procuramos associar sempre as abstracções arithmeticas ás cousas ambientes. E, não só isso: alliámos a aritméthica ás cousas que cosntituem objecto de estricta esphera dos conhecimentos oriundos da experiência infantil, escolhendo, deliberadamente, aquellas que, ou pelo caracter de diurnalidade, ou pelo interesse que despertam, mais preocupam o espírito da criança. Mas, como as cousas em si não bastam para captar a attenção dos alumnos, entendemos de bom alvitre dosar as lições sob a forma de contos, instructivos e educativos ao mesmo tempo; contos estes que, devidamente interpretados pelo professor na linguagem dos discípulos, em escala ascendente, vão, gradualmente, abrindo aos alumnos perspectivas de novos phenomenos arithmeticos (Büchler, 1919, prefácio, p.4).

Pode-se destacar a preocupação do autor em enfatizar situações do dia a dia, preparando os alunos para a vida, através de temas, tais como: de que forma os filhos podem ajudar os pais, por que economizar, não maltratar os animais, falar com precisão, observar a natureza, cumprir com os deveres, obedecer aos pais, entre outros valores a serem observados, estimulando a criança tornar-se um cidadão correto.

Portanto, é destacável o comprometimento do autor em introduzir os diferentes assuntos através de textos que se relacionam ao dia a dia do educando, pontuando temas pertinentes para a sociedade da época. Outro fator relevante é a questão da interdisciplinaridade observada através dos textos, tais como: Educação Financeira, lidas domésticas, justiça, preservação da natureza, entre outros temas.

Na sequência da análise observou-se o livro Rechenbuch für Deutsche Schulen in Brasilien de Matthäus Grimm, 1ª Heft. Neste livro o autor propõe inicialmente a introdução dos números de 1 a 10, porém, difere da grande maioria dos livros de aritmética da época, pois, introduz separadamente, as quatro operações fundamentais. Na visão do autor essas trabalhadas simultaneamente poderiam confundiriam a cabeça das crianças.

Observa-se que para introduzir a ideia dos primeiros números, o autor utiliza exemplos da natureza, recorrendo ao cotidiano dos alunos. Portanto as leituras e os livros que foram confeccionados aqui utilizam contos, atividades de leituras, cálculos. Todos primam pelos assuntos locais. Então, tudo isso era dirigido para que a criança se conscientizasse, e se tornasse conhecedor de seu ambiente, que fosse realmente um membro comprometido e solidário com aquele ambiente. Esse fato igualmente foi observado no livro Aritmética Elementar de Büchler (1919), quando o autor recorre a noções elementares para nortear o ensino de aritmética associando-as a coisas do ambiente do aluno.

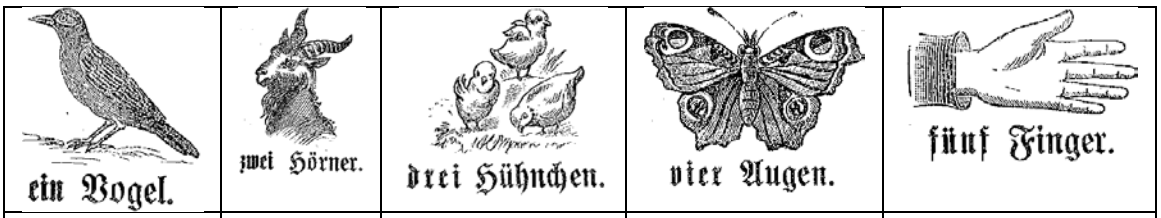


Figura 1. Introdução da ideia dos primeiros números.

Na sequência, o autor introduz a adição relacionando situações concretas ao algoritmo, onde devidamente apresentado pelo autor vai, gradualmente, construindo nos alunos novos conceitos aritméticos.

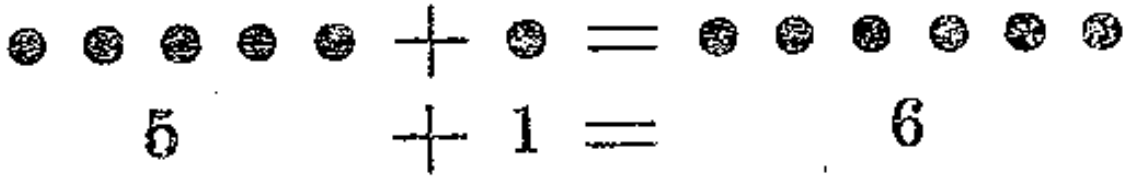


Figura 2. Introdução do algoritmo.

Na sequência o autor organiza uma série de exercícios repetitivos, instigando a fixação dessas operações e a ideia de quantidade. Para Grimm, o objetivo primordial do livro didático de aritmética direciona-se, inicialmente, aos professores que desenvolvem suas atividades em escolas rurais unidocentes. Trata-se de um guia seguro, segundo Mauro (2005), com vários exercícios, um facilitador do trabalho, onde se poupa a escrita na lousa auxiliando o professor, pois quando um grupo escuta as explicações do professor os demais copiam e realizam as atividades de aritmética. Outro aspecto destacado pela autora sobre o papel do livro didático na visão de Grimm é que este serve como um auxiliar do professor em suas práticas de sala de aula, porém, se este trabalha única e exclusivamente o livro didático a aula torna-se não interessante. Para ela, o livro constitui-se apenas uma estrutura morta, e que ganha vida através da forma com que o professor aborda os diferentes conteúdos, dando sentido a eles. É a tão enfatizada contextualização em sala de aula.

O autor apresenta ao longo das páginas uma grande quantidade de exercícios que primam pela repetição com a ideia de fixar o conceito dos números e suas operações. Nas páginas finais

trabalham-se unidades, dezenas e centenas de milhar contemplando as quatro operações fundamentais, porém separadamente. Na sequência, o autor introduz situações problemas, de forma contextualizada buscando, de certa forma, dar sentido aos exercícios anteriormente trabalhados. Para finalizar, trabalha com algarismos romanos até 2000.

> Em suas paginas finais o livro traz a conhecida tabuada pitagórica, pois saber a tabuada décor era ponto de honra para os alunos. O livro apresenta duas tabelas, a primeira com números de 1 a 10 e a segunda com números maiores que 10.

O Ginásio Conceição

Para atender às necessidades da região e, principalmente, à formação de novos padres para as comunidades de imigrantes no interior do estado, surge, em São Leopoldo, em 1869, o Colégio Nossa Senhora da Conceição. Na visão dos padres, não bastava apenas o ensino elementar, já em funcionamento nessa localidade. Fazia-se necessário um estabelecimento para formar professores rurais e futuros sacerdotes para as colônias alemãs.

A Trajetória do educandário Leopoldense está dividida, segundo Rabuske, em três períodos distintos durante os 43 anos de existência, descritos conforme a tabela a seguir

Tabela 1
Fases do Ginásio Nossa Sª da Conceição.

Fase	Período
1869-1877	Única e exclusivamente alemã. (Formação de padres e professores para as colônias).
1877-1894	Predomínio crescente do elemento luso-brasileiro. E inicio dos exames parcelados.
1894-1912	Período alcançado pelo reconhecimento oficial e na qualidade de Ginásio Equiparado em 1900. E encerramento das atividades.

Fonte: Rabuske, 1988, p.81.

Com o passar dos anos observou-se que a finalidade primeira, de formar professores para os distritos coloniais e padres para a cura de almas, mostrou-se ilusória. Tendo sido abandonada a ideia de formar professores e sacerdotes, o colégio toma novos rumos, o de preparar seus alunos para os "exames parcelados" para a carreira acadêmica. No Brasil, por largo tempo, existiu uma única instituição apta a realizar esses exames: o Ginásio Dom Pedro II, no Rio de Janeiro. Em 1878, inicia-se uma nova etapa do Conceição, pois os esforços são destinados a preparar os jovens para os exames parcelados e, consequentemente, à formação acadêmica.

Devido aos louros colhidos pelos jovens do Conceição, nos "exames parcelados", e da qualidade do ensino dos Jesuítas, observou-se um aumento significativo do número de alunos nos anos seguintes, consequentemente, a ampliação do prédio onde funcionava o Colégio.

Portanto, o "Colégio dos Padres", como era conhecido na região, tornou-se um importante educandário nesta localidade, não somente pelos conteúdos ministrados pelos docentes, mas pelo canto, teatro e o museu. Também pelo fator didático, pedagógico e educativo.

O educandário era visita obrigatória a quem visitasse São Leopoldo. Todos esses fatores contribuíram para a realização de mais um sonho: a equiparação do Conceição ao Ginásio Nacional Dom Pedro II.

No dia três de fevereiro de 1900, pelo Decreto nº 3580, o Colégio Conceição obteve o caráter e os direitos de Ginásio equiparado. Com a equiparação, o Conceição obteve não apenas o direito de efetuar os exames parcelados, como ainda conferir o grau de bacharel a seus alunos.

Para que todos esses objetivos fossem atingidos, destaca-se o alto grau de capacitação acadêmica dos padres Jesuítas observado por Kreutz (1994, p.39-40) como um fator responsável pelo alcance das iniciativas e das estruturas criadas no meio teuto-brasileiro. Para o autor, os padres Jesuítas, líderes do projeto católico "figuravam entre os melhores quadros da Companhia nas regiões de língua alemã da Europa". Esse projeto obteve bom êxito, o que levou a quase erradicação do analfabetismo, nessas comunidades.

Segundo Rambo (2013), os Jesuítas foram expulsos da Alemanha devido ao kulturkampf[6] de Bismarck, quando este unificou a Alemanha, que é a própria criação do estado alemão. Segundo ele o cristianismo era adversário do Estado, já que obedecia doutrinariamente de Roma. Eles não poderiam ser bons cidadãos devido à fidelidade e obediência direta ao Papa e com isso os rotulou como espiões, expulsando-os deste país.

Então, veio para o Rio Grande do Sul um grupo de Jesuítas que jamais teriam vindo, sendo intelectuais de alto valor, que foram expulsos de lá e não tinham mais o que fazer. A escolha recaiu sobre essa região pelo fato de ser um campo fértil, com um grande número de imigrantes alemães e por haver um colégio aqui, já em bom andamento que era o Conceição[7]. Então, essa influência foi realmente enorme, nesse sentido, nós aqui no sul do Brasil tivemos grandes vantagens, pois, tínhamos uma educação deficitária.

Em 1912, o Ginásio Conceição encerrou suas atividades em São Leopoldo. Entre diversos fatores que acarretaram o seu fechamento, acredita-se que o principal fator tenha sido a lei Rivadávia, que privou o Ginásio Conceição da sua equiparação, então ele não tinha mais o que oferecer, perdeu o charme.

Segundo Bohnen e Ullmann (1989, p.203), através dos documentos que chegaram a público, apontam-se:

- Lei Rivadávia, de cinco de abril de 1911. Através dessa lei, todas as equiparações ao Ginásio Nacional Dom Pedro II foram anuladas ou extintas. Aqui, vale ressaltar o transtorno que isso acarretou, visto que a escola tinha uma estrutura consolidada.
- Qualidades negativas do Padre Lütgem, superior de 1904 a 1909. Devido a sua maneira de governar, para a grande maioria, estreita e não simpática, acarretando um descontentamento geral, por isso ninguém queria vir a São Leopoldo. A Lei Rivadávia favoreceu esse descontentamento, sendo um fator a mais.

O Conceição tratou logo de restabelecer-se do forte abalo, reorganizando-se seus programas e ampliando o setor de ensino comercial, mas, desencantados com o ato governamental, que lhes retirou o reconhecimento oficial dos exames prestados no Ginásio, os

[6] Kulturkampf ou *luta pela cultura* foi um movimento anticlerical alemão do século XIX, iniciado por Otto Von Bismark, chanceler do Império alemão em 1872.
[7] Colégio Nossa Senhora da Conceição, de São Leopoldo, 1ª escola dos Jesuítas no sul do Brasil, fundada em 1869, fechando suas portas em 1912. O colégio foi criado com a finalidade de formar professores para os distritos coloniais e futuros sacerdotes. (Cf. Bohnen, 1989, p.167-169).

padres jesuítas resolveram fechar o Conceição, para, em 1913, convertê-lo em seminário provincial.

Já na visão de Schmitz, além dos itens relatados, São Leopoldo não seria o grande centro da imigração alemã no Rio Grande do Sul e sim Porto Alegre. Logo, os Jesuítas concentraram suas atividades no Colégio Anchieta já em funcionamento na capital do Rio Grande do Sul.

Essa mudança deve-se ao fato de que os Jesuítas deram-se conta que em São Leopoldo não era a capital dos alemães no Brasil. O centro de Porto Alegre era dominado por comerciantes alemães, foi o que puxou para Porto Alegre, um núcleo maior. Nesta época surge a Igreja de São José que era dos alemães, a escola de São José, que era sustentada pelos alemães em Porto Alegre. O que puxou para Porto Alegre foi que precisavam de um núcleo maior. (Schmitz, 2012, p. 08).

Em contrapartida, Rambo (2013), discorda dessa posição, pois, segundo ele, este não seria o motivo primordial, pois, São Leopoldo é quase igual ou mais alemã que Porto Alegre. Segundo o historiador.

O fato é que estávamos num processo de urbanização, e um processo de multiplicação de escolas, então um colégio que concentra toda a elite do estado, em situação de internato, isto estava começando a mexer com este tipo de perfil, perfil físico, e não perfil acadêmico, e o Ginásio Anchieta já funcionava como externato do Conceição em Porto Alegre. Então, o que se fez, transformou-se o filho em pai. Então Porto Alegre era o centro administrativo, centro financeiro, centro comercial, apresentava uma indústria já bastante sinalizada, que crescia rapidamente para uma indústria de porte médio. Artesanatos, comércio de importação e exportação, tudo vai se transformando, o artesanato em pequenas indústrias, vindo muitos intelectuais de fora, arquitetos, engenheiros, advogados, médicos, criaram-se hospitais. Então, a grande referência do estado realmente vai ser Porto Alegre, como capital. (Rambo, 2013, p.12).

Independente das opiniões e suas divergências, o certo é que vários fatores tenham contribuído para que este importante educandário leopoldense tenha fechado suas portas e transferido suas atividades para a capital gaúcha. Porém, a ideia de dar sequência ao colégio de Porto Alegre parece ser a mais plausível para o fato.

Em relação ao currículo adotado pelo Conceição ao longo dos anos, foi possível identificar três momentos específicos. Num primeiro momento, desde a sua origem até 1878. Neste período, é bem provável que a escola adotava o currículo do Colégio Stella Matutina de Feldkirch (Austria). Após o ano de 1878, a escola optou em priorizar os exames parcelados, acredita-se que passou a olhar com maior atenção os conteúdos a serem cobrados nestes exames, o que era oficial no país. No terceiro e último momento, especificamente após 1894, a escola passou a utilizar o currículo do Ginásio Oficial, o Ginásio Dom Pedro II do Rio de Janeiro. Este fato está bem evidenciado devido ser um dos objetivos a serem atingidos pelo Colégio leopoldense, o status de Ginásio equiparado, para tanto, entre outros fatores, era necessário seguir o currículo oficial.

Outro fato a ser observado refere-se ao início e término do ano letivo. As aulas iniciavam em fevereiro, estendendo-se até o mês de dezembro. Quando os alunos prestavam os exames parcelados em Porto Alegre, esses ocorriam durante o mês de novembro. Em relação ao sistema dos exames parcelados, adotados no país, Rabuske (1988, 123) destaca,

> [...] sentindo-se alguém preparado para os exames em determinada matéria, apresentava-se com esse fim e, sendo aprovado, dispunha-se para a seguinte ou as seguintes, até vencer tantas quanto se requeriam para a entrada nalguma Academia ou Faculdade. Esse sistema não satisfazia em absoluto a jesuítas teutos, acostumados ao ginásio alemão completo, com o seu exame de maturidade. Tiveram esses de submeter-se, contudo as condições legais vigentes no país de adoção.

No período em que o Colégio adquiriu o status de Ginásio equiparado esse exames se verificavam no mês de dezembro, porém com o mesmo modelo.

Finalizando esta análise do Ginásio Conceição, segundo os autores, não se podem omitir as conquistas alcançadas ao longo de 43 anos de atividades do Colégio Conceição e, posteriormente, do Ginásio Nossa Senhora da Conceição. Pode atribuir, em grande parte, aos mestres que, com uma sólida formação europeia, contribuíram de forma significativa na formação dos alunos. Muitos desses professores destacaram-se no campo das ciências, das letras, das artes, entre outras.

Nesta investigação, que prima pela Educação Matemática, destacam-se as produções destinadas, especificamente, ao campo da Matemática, entre elas, segundo Bohnen e Ullmann (1989): *Curso Técnico e Prático de Álgebra Elementar* (Porto Alegre, Ed. Selbach, s/d. 258p.).

Exercícios de Aritmética - Parte prática (Coleção de 700 exercícios progressivos, compilados pelo autor. São Leopoldo, Ginásio Conceição, RS, 1906. 156 p.). Produzidos pelo Padre Browe[8], SJ, Pedro (1876-1949), que esteve no Ginásio leopoldense de 1901 a 1905, ministrando aulas de Matemática. Além disso, inúmeras produções literárias e científicas foram organizadas pelos docentes, em diferentes áreas do conhecimento, que desenvolveram suas atividades neste educandário leopoldense.

Considerações Finais

Através da investigação que resultou neste artigo, foi possível identificar alguns aspectos do início do processo de instrução no Rio Grande do Sul, como a formação de professores e as escolas paroquiais nas colônias teuto-brasileiras bem como a sua importância em algumas regiões do Estado. Foi possível, ainda, verificar as dificuldades que os educadores enfrentaram quanto à produção de material didático, fomento para discussões referentes às práticas pedagógicas e dificuldades quanto às questões financeiras.

No que diz respeito à educação em geral, constata-se que essa era direcionada, principalmente, às questões de cunho religioso e familiares, ou seja, os professores, junto com as famílias, deveriam ensinar os alunos a ter respeito aos mais velhos e a temer a Deus, sendo, por isso, primordial trabalhar aquilo que fosse útil para a vida do colono. Esse fato estava relacionado à cultura herdada do país de origem do imigrante e ao trabalho desenvolvido pelos Jesuítas nessas comunidades.

Os materiais didáticos, inicialmente, vinham da Alemanha e, ao final do século XIX, começaram a ser elaborados no Brasil, sendo muitos deles escritos ainda em língua alemã. Já em

[8] Pe. Pedro Browe nasceu em Salzburg, Áustria, dia 22 de dezembro de 1876. Em 1901, o então escolástico chegou da Europa e foi para Porto Alegre. De 1902 a 1906 esteve no colégio Conceição em São Leopoldo onde se dedicou ao magistério. Em 1903 editou o Livro de Aritmética "Curso Teórico e Prático de Álgebra Elementar". No final de 1906 retorna a Europa cursar Teologia e não retornou mais ao Brasil. Faleceu em 1949 em Baden-Baden (Alemanha) aos 73 anos. (Spohr, 2011).

relação aos livros didáticos analisados, observa-se, em Trajano (1891) e Büchler (1919), inicialmente, uma preocupação em relação ao ensino de Aritmética, evidenciando a necessidade de que os métodos de ensino priorizassem o raciocínio em detrimento das memorizações das regras exaustivas, o que era característico da época. Desenvolveram-se, no período, compêndios que visavam ao dia a dia dos alunos, inserindo os assuntos rotineiros, gradativamente, ao cotidiano escolar.

No livro *Rechenbuch für Deutsche Schulen in Brasillien*, de Mathäus Grimm, identifica-se, por exemplo, a preocupação do autor em relação aos conteúdos de Matemática, desprovidos de formalismo, prendendo-se única e exclusivamente ao ensino de uma matemática prática. São ensinados métodos elementares, estimulando-se cálculos mentais rápidos, sem a necessidade do uso da lousa, lápis, papel e, principalmente, do excesso de fórmulas e regras. Logo, os conteúdos matemáticos e a forma como eram trabalhados iam ao encontro das necessidades exigidas pelo contexto sociocultural vivenciado pelos alunos naquele período, respeitando a vida cotidiana na colônia

Referências

Bohnen, A., & Ullmann, R.A. (1989). *A Atividade dos Jesuítas de São Leopoldo***.** São Leopoldo, UNISINOS.

Bücler, G. A. (1919). *Arithmetica Elementar. Livro I*. São Paulo e Rio: Editora Weiszflog Irmãos.

Grimm, M. (n.d). *Rechenbuch für Deutsche Schulen in Brasilien, 1ª seft***.** Porto Alegre, Livraria Selbach.

Kreutz, L. (1991). *O Professor Paroquial: Magistério e Imigração Alemã.* Porto Alegre: Editora: UFRGS; UFSC; EDUCS.

Kreutz, L. (1994). *Material Didático e Currículo na Escola Teuto-Brasileira.* Porto Alegre: Editora Unisinos.

Mauro,S. (2005). *Uma história da matemática escolar desenvolvida por comunidades de origem alemã no Rio Grande do Sul no final do século XIX e início do século XX* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campinas.

Rambo, A. B. (1994), *A Escola Comunitária Teuto-Brasileira Católica***.** São Leopoldo: UNISINOS.

Rambo, A. B. (2013). *A Escola Paroquial e as escolas dos Jesuítas no sul do Brasil.* São Leopoldo, 15 de março 2013. Entrevista concedida a Silvio Luiz Martins Britto.

Schneider, R. P.(1993), *A Instrução Pública no Rio Grande do Sul, 1770-1889*. Porto Alegre: Editora UFRGS.

Schmitz, I. (2012). *A Ordem dos Jesuítas***.** São Leopoldo, 02 out. 2012. Entrevista concedida a Silvio Luiz Martins Britto.

Trajano, A. (1891), *Arithmetica Progressiva* (6ª ed.). Rio de Janeiro: Ed. Companhia Typographica do Brasil.

Los problemas de aligación[1]

Bernardo **Gómez** Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia
España
b.gomez@uv.es

Resumen

Se estudian aquí los enfoques metodológicos en la enseñanza de los problemas de aligación transmitidos por la tradición escolar recogida en los libros de texto históricos y actuales. Es una investigación cualitativa, de tipo histórico epistemológico, usando la metodología del análisis de textos. Se da cuenta de los problemas de aligación, su tipología, contextos, lecturas analíticas y métodos de resolución, desde su aparición en las antiguas culturas hasta nuestros días.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, pensamiento numérico y algebraico, resolución de problemas, aligación.

Introducción

Desde muy antiguo se conoce una gran variedad de problemas descriptivos de matemáticas (término usado por Swetz, 2012) asociados a aspectos de la vida cotidiana, que se han usado para dar a conocer reglas extraordinarias (e. g. regla de dos, regla de tres, de falsa posición, etc.), métodos especiales y disposición prácticas de los datos, más o menos olvidados por las restricciones propias del modelo actual de la enseñanza obligatoria. La mayoría de estos problemas se conocen por el nombre que la tradición les ha asignado, unas veces vinculado a un rasgo superficial del enunciado como el contexto, las acciones involucradas, los agentes que intervienen, o la demanda o pregunta; y otras veces vinculados a la regla práctica que los resuelve. Entre la amplia variedad de estos problemas se estudian aquí los problemas de aligación, más conocidos como problemas de mezclas y aleaciones

Los antecedentes de estos problemas se remontan a las antiguas culturas matemáticas, mesopotámicas, egipcia, china e hindú anteriores a Cristo. Se pueden encontrar ejemplos en las distintas colecciones de problemas clásicos que han llegado hasta nuestros días, por ejemplo, en los 85 problemas compilados hace más de tres mil años en el Papiro Rhind (1650 a. C.), en los 247 problemas del *Jiuzhang suanshu* (los nueve capítulos) del arte matemático Chino (100 d. C.), o en los epigramas y enigmas de la Antología Griega recapitulados por Metrodoro (500 d. C.). Su estreno en Occidente parece situarse en las colecciones de matemáticas recreativas de Beda (s. VIII): De *Arithmeticis Prepositionibus*; y de Alcuino: *Propositiones ad acuendos juvenes* (775), redactados para una escuela de jóvenes talentos fundada por Carlomagno (Swetz, 1989, p. 333), y siglos después en el *Liber Abaci* (Fibonacci, 1202). Desde entonces su

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, referencias: EDU2011-27168 y EDU2009-10599

popularidad ha sido tal que han estado presentes en los libros de enseñanza de las matemáticas sin solución de continuidad hasta nuestros días, con un enfoque pedagógico que consiste en presentarlos como un subproducto de otros aprendizajes para mostrar su aplicabilidad, pero raramente como un objeto de estudio por sí mismos.

El objetivo de esta comunicación es aportar claridad y generalidad metodológica en relación con los problemas de aligación. Para centrar el estudio se ha procedido a una revisión de textos, históricos y actuales, tomado como unidades de análisis la tipología de los problemas, sus contextos, las lecturas analíticas y sus métodos de resolución.

Marco teórico

Cuando se quiere indagar cómo se han configurado las matemáticas de enseñanza en diferentes momentos de la historia hay que acudir al análisis de los libros de texto del pasado como medio de instrucción, ya que solo éstos pueden aportar información sobre su planificación y puesta en práctica, al ser las únicas fuentes documentales primarias y los únicos registros disponibles.

Para ese análisis es útil servirse de las metodologías del análisis histórico y epistemológico, y del Análisis Didáctico (ver Rico y Fernández 2013, para más detalle de esta última metodología) propias de la Didáctica de las matemáticas. Para el análisis histórico y epistemológico se necesita de una aproximación global, ya que estudiar textos aisladamente, o comparar varios textos de una misma época entre sí, es insuficiente, en la medida que tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, y las particularidades propias del sistema educativo de la época. Es en este sentido en el que adquiere importancia efectuar una buena selección de libros de texto representativos de las grandes etapas en que se puede dividir la historia de las ideas matemáticas objeto de estudio. A saber: el periodo antiguo, el anterior a la imprenta, el de las aritméticas comerciales, el de los grandes libros de autor anteriores al sistema escolar, el de los comienzos del libro escolar, y el de la enseñanza graduada en sus diversos planes de estudio (ver Gómez, 2011).

Para el análisis didáctico de los libros de texto de un determinado contenido matemático se necesita delimitar unidades y subunidades de análisis que den cuenta de los aspectos conceptuales, estructurales, procedimentales, metodológicos y representacionales. En el caso particular de que el objeto de estudio sea una determinada familia de problemas, son unidades básicas para su análisis: los tipos de problemas, sus contextos, acciones y agentes; y la lectura analítica de los enunciados que los autores han dejado reflejadas en sus textos y que sustentan las reglas, fórmulas y métodos de resolución

La lectura analítica

En sentido estricto la lectura analítica se refiere al planteamiento algebraico del problema; es decir, a poner el problema en ecuación. Pero para ello no hay reglas fijas, ya que no siempre las condiciones de la cuestión pueden ser simbolizadas en el mismo orden en que se presentan en el problema mediante la traducción inmediata del lenguaje ordinario al simbólico, porque están envueltas en el enunciado de tal manera que es difícil descubrir su relación y sucesión, en ese caso hay que hacerse cargo de todas las condiciones que explícita o implícitamente contenga la propuesta, y desenvolver las relaciones que las cantidades desconocidas tengan entre sí y con las cantidades conocidas (Lacroix, 1821, p. 25). Por eso, y con carácter general se entiende que la lectura analítica del enunciado de un problema no es simplemente traducirlo al lenguaje

algebraico, sino que es más bien reducirlo a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades (Puig, 2003, p. 99).

La lectura analítica es el comienzo del método cartesiano donde a las cantidades que se buscan se les asignan letras llamadas incógnitas y de ella se obtienen las ecuaciones de cuya transformación se siguen las fórmulas. De modo que, mientras que la ecuación es lo que resulta al igualar dos expresiones algebraicas que representan la misma cantidad, obtenidas al describir la relación aritmética que unas cantidades representadas con expresiones algebraicas tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica (Puig, 2003, p. 100), la fórmula (que se deduce de la ecuación) es la lista de operaciones que resulta al describir la relación aritmética de las cantidades conocidas, expresadas en términos generales, entre sí y con las cantidades desconocidas que se buscan. Cuando la lista de operaciones que hay que realizar con las cantidades conocidas, para obtener las desconocidas, se expresa en términos particulares, sin dar razón de las mismas se llaman reglas. Cuando las lecturas analíticas conducen a la ecuación se entenderá que son lecturas algebraicas, y cuando conducen a la fórmula, sin pasar por la ecuación, se entenderá que son lecturas aritméticas.

Los problemas de aligación

Bajo el nombre de regla de aligación se conoce el procedimiento general para resolver los problemas relacionados con las mezclas. Por mezcla se entiende la unión de varias sustancias de distinta calidad y precio; si son metales se llama aleación, y si son líquidos y sustancias, como por ejemplo la mezcla de agua y sal se llama disolución. En la actualidad parece ser que el término aligación está en desuso y se prefiere hablar directamente de problemas de mezclas y aleaciones.

> Se tienen dos clases de vino, una vale 12 d, y la otra 15 d. se quieren mezclar para que valgan 13 d. Pregunta. ¿Cuánto vino hay que poner de cada clase? (Stifel, 1544, p. 266 dcha.).
>
> Un hombre tiene dos suertes de oro, uno es de ley 17 quilates, y el otro es de 23 quilates, quiere hacer oro de 22 quilates de ley, preguntase cuanto oro tomará de cada suerte para que juntas las dos cantidades, y ligada una con la otra, sea oro de ley de 22 quilates (Santa Cruz, 1625, p. 222 dcha.).
>
> Calcular la cantidad de sal que hay que añadir a una disolución de 342 g. al 5% para elevar su concentración al 10% (Luis Vives, 1950, p. 122).

Contextos y agentes

Antecedentes de los problemas de aligación se encuentran en determinados problemas curiosos, en los contextos de compras y repartos, como los que aparecen en la colección de Alcuino (775), donde no hay ninguna mención explícita a mezclas o aleaciones.

> Dijo un mercader: quiero comprar cien cerdos por cien denarios; sin embargo pagaría 10 denarios por un macho, 5 por una hembra y uno por dos lechones. Diga, aquel que sepa, ¿cuántos machos, cuántas hembras y cuántos lechones debe haber de forma que no sobre ni falte ninguno? (Alcuino, 5, 804, p. 1145).
>
> Cierto paterfamilias disponía de 20 sirvientes. Ordenó que les fueran repartidos 20 modios de maíz del siguiente modo: que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños debe haber? (Alcuino 32, 804, p. 1154).

Más adelante, con la aparición de las aritméticas comerciales se impusieron los contextos que hacen referencia explícita a las mezclas, preferentemente de alimentos o bebidas, y a la fundición de metales nobles como el oro y la plata.

Un mercader tiene un riel de plata que pesa 3 marcos, y es a 7 dineros de ley, y quiere lo subir que sea a 9 dineros de ley; pregunto, ¿cuánto tomará de plata fina de a 12 dineros, que mezclándola con la de a 7 dineros sea a 9 dineros de ley? (Ventallol, 1521, cap..13, fo 80).

Un mercader tiene 2 piezas de oro, el cual no sabe cuánto [cuántos marcos] pesa cada pieza, por más que sabe que el marco de la una pieza vale 23 ducados cada marco, y así mismo el marco de la segunda pieza vale 18. Este mercader, de estas dos piezas hizo una que pesó 40 marcos, después de juntadas en uno, y halló que valía cada marco veinte ducados. Demando cuánto pesaba cada pieza antes de que fuesen fundidas (Ortega, 1537, p. 176).

Un logrero ha mezclado 15 fanegas de trigo de a 23 reales la fanega con 12 fanegas de centeno a 19 reales la fanega ¿a qué precio ha de vender cada fanega del montón para no perder ni ganar? (Bails, 1790, p. 133 y 134).

¿Qué porciones de vino de a 16 reales y de a 9 he de mezclar para vender la mezcla a 13 reales? (Vallejo, 1841, p. 365).

El procedimiento para resolver los problemas de aligación también sirve para resolver otros problemas, diversos y en contextos diferentes. Por ejemplo los problemas de densidad, porque la densidad se puede asimilar al precio medio y proceder como si de éste se tratase.

Con dos líquidos de densidades 1,3 y 0,7 se ha formado una mezcla de densidad 0,9. Sabiendo que la cantidad total es de 30 m^3 se piden las cantidades de cada líquido (García, 1959, p. 110).

Tres libreros compraron 1250 libros de Aritmética por 375 francos; al primero, le correspondieron 500 libros; al segundo, 450; y al tercero, el resto, es decir, 300. Pregunta: ¿cuánto paga el primero, cuánto el segundo y cuánto el tercero (Silíceo, 1514, p. 266).

Un bancario tiene dos tipos de cambio: en uno 10 monedas hacen una corona, y en el otro, 20 monedas hacen una corona. Una persona desea cambiar una corona por 17 monedas. ¿Cuántas monedas de cada tipo deben darle? (Euler, 1882, p. 202).

Hállese el promedio del peso de cuatro pavos que pesan respectivamente 10 libras, 11 libras, 12 libras y 13e libras (Wentworth, 1900, p. 259)

Un coche recorre un trayecto AB a una velocidad media de 60 km/h, y el trayecto de vuelta a una velocidad media de 40 km/h. Halla la velocidad media del trayecto (SM. 1998, p. 55).

La nota media de matemáticas en la clase de 1º A es 5.4 y la de 1º B es 6.4. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo si en total son 50, con una nota media de5,88 (Anaya, 2005, p. 104).

Tipos de problemas

La estructura aritmética de los problemas de aligación y similares es la de calcular un promedio; esto es, el número que en una adición se puede sustituir por los sumandos sin alterar la suma, que como se sabe se obtiene hallando el cociente de la suma por el número de sumandos. Según cuál sea la demanda o pregunta se distinguen dos tipos principales de problemas de aligación. Cuando lo que se busca es el promedio la aligación se llama "medial" y cuando se buscan los sumandos "alternada".

Medial: Se mezclan c kg de café a p ptas. Kg con c' kg a p' ptas. y con c'' kg a p'' ptas. ¿A cómo resulta el precio de la mezcla (García, 1959, p. 108).

Alternada. Se quiere formar una mezcla de T kg de café a P ptas. el kg con dos clases distintas. El precio de la primera es p ptas. el kg y el de la segunda p' ptas. el kg. ¿Cuántos kg habrá de cada clase? (García, 1959, p. 109).

En el contexto de las Aleaciones, estos dos tipos se concretan en hallar la ley de aleación de un metal noble (cantidad de metal noble por unidad de peso, expresada hoy en milésimas o quilates) y hallar las cantidades que hay que fundir de cada metal.

Medial: Se han fundido 2 lingotes de oro: el primero pesa 3 kg., 45 gr., y su ley es 800 milésimas; el 2º pesa 1 kg., 20 gr., y es a ley de oro de 670 milésimas. ¿Cuál es la ley de la aleación? (Dalmau, 1827, p. 172).

Alternada: Un hombre tiene 150 pesos de oro, ley 20 quilates y un grano, quiérele juntar tanta cantidad de oro, ley 23 quilates y 2 granos, que haga oro de 22 quilates. Preguntase cuánto tomará del de 22 quilates y 2 granos, para que juntos y ligados el oro de ambas suertes, sea de ley 22 quilates (Santa Cruz, 1625, p. 223 dcha.).

La diferencia entre uno y otro tipo de problema es que el precio medio es lo que se busca en la aligación medial y es una cantidad conocida en la alternada; y que las cantidades que entran en la mezcla y sus precios son cantidades conocidas en la medial mientras que las cantidades que han de mezclarse, conocidos los precios, es lo que se busca en la alternada. Esta es una de las razones por lo que se dice de ambos tipos de problemas que son inversos. En la aligación inversa también pueden incluirse los problemas en los que se busca averiguar los precios de las componentes cuando se conocen las cantidades mezcladas y el precio de la mezcla.

En los libros escolares actuales los problemas de aligación se integran en el bloque del álgebra, en el capítulo dedicado a las ecuaciones primer grado, porque esta es la estructura algebraica que se desprende al asignar las letras a las cantidades desconocidas en la formulación del promedio.

Lecturas analíticas

La resolución de los problemas de aligación se sustenta en la condición esencial de toda mezcla. Si se atiende a los precios, esta condición se suele enunciar, diciendo que después de hecha la mezcla debe resultar el mismo precio que por separado, o lo que es lo mismo, que el total de las cantidades ha de valer lo mismo antes y después de la mezcla. Mientras que si se atiende a las ganancias y pérdidas se enuncia diciendo que lo que se gana con el de menor valor ha de compensar lo que se pierde con el de mayor valor, o lo que es lo mismo, la pérdida que resulta por la mezcla de unas cantidades ha de ser igual a la ganancia que producen otras.

La lectura analítica de esta condición da lugar a la relación entre cantidades (I):

$$\text{I)}\quad Ap + Bq = (A+B)P_m$$

A y B son las cantidades mezcladas, p y q es el precio de la unidad para cada una de ellas y P_m es el precio medio o por unidad de mezcla.

Lectura analítica de los problemas de aligación medial o directa

En los problemas de aligación medial, el promedio por el que se pregunta viene dado por la razón entre el valor total de las cantidades mezcladas, según sus precios respectivos, y la cantidad total de unidades mezcladas.

$$Ap+Bq = (A+B)P_m \rightarrow P_m=(Ap+Bq)/(A+B)$$

La formulación de esta razón es: Para sacar el precio medio se multiplica cada género por el precio a que se pagó, se suman unos con otros los productos; claro está que su suma será el valor de toda la mezcla. Por consiguiente con partir este valor por la suma de todos los géneros, el cociente será el precio medio o común de todos (Bails, 1790, p. 133). La disposición práctica puede ser en columnas, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Un logrero ha mezclado 15 fanegas de trigo de a 23 reales la fanega con 12 fanegas de centeno a 19 reales la fanega ¿a qué precio ha de vender cada fanega del montón para no perder ni ganar?

Las 15 fanegas de trigo y las 12 de centeno son 27 fanegas
15 fanegas de trigo a 32 reales son … . 480
12 de centeno a 19 reales son … … … 228
Suma. … … … … … … … … … … … . 708

Por tanto, pues, 708 por 27, y el cociente 26 1/6, o 26 reales 7 maravedís es el precio a que se podrá vender cada fanega de la mezcla sin perder ni ganar" (Bails, 1790, p. 133 y 134).

Al utilizar la letra *x* para denominar la cantidad desconocida en la relación (I) (el precio medio) se obtiene la expresión lineal: $Ap+Bq = (A+B)x$, de la cual se sigue la fórmula que da la solución directamente, sin más que despejar la *x* y sin necesidad de operarla, por eso este tipo d problemas de aligación, que no necesitan una lectura algebraica, se les conoce hoy como problemas de aligación directa. Su planteamiento general es en los siguientes términos:

Se mezclan c kg de café a p ptas. Kg con c' kg a p' ptas. y con c'' kg a p'' ptas. ¿A cómo resulta el precio de la mezcla. Llamemos: x= ptas. que vale el kg de mezcla o precio medio. Cantidad total mezclada c+c'+c''. Valor total de la mezcla (c+c'+c'')x. Valor de c kg a p ptas. kg cp. Valor de c' kg a p' ptas. kg c'p'. Valor de c'' kg a p'' ptas. kg c''p''

Ha de verificarse: (c+c'+c'')x = cp + c'p'+ c''p''. Ecuación literal de primer grado que resuelta da:

Precio medio = $x = \frac{cp+c'p'+c''p'}{c+c'+c''}$ (García, 1959, p. 108).

Lectura analítica de los problemas de aligación alternada o inversa

Igual que en los problemas de aligación medial, en los problemas de aligación alternada las cantidades por las que se pregunta se desprenden de la relación fundamental (I), pero ahora vienen dadas por la razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.

$$Ap + Bq = (A+B)P_m \rightarrow A(p-P_m)=B(P_m-q) \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{(P_m-q)}{(p-P_m)}$$

En el capítulo 11, apartado 6, del *Liber abaci*, denominado "de alear dinero", Fibonacci introduce esta regla. Primero la enuncia, después la aplica a un ejemplo, justifica el resultado y finalmente la extiende a otros problemas derivados o subtipos del caso general.

Si se tienen dos dineros, uno de los cuales es mayor y otro menor que el dinero que se quiere obtener, se puede hacer sin (necesidad de añadir) ni cobre ni plata, escribiendo debajo de los dos dineros en orden inverso las diferencias entre las onzas de plata del dinero que quiere hacer con las de los dos dineros.

Por ejemplo, si uno tiene dinero de 2 onzas, y dinero de 9 onzas, con los que quiere hacer dinero de 5 onzas. Escribe el 2 y el 9 en una línea, y debajo de ésta y entre ellos escribe el 5, como se muestra [en el cuadro de la derecha]; después la diferencia entre el 2 y el 5, que es 3, se escribe arriba del 9; y en orden inverso, la diferencia entre el 5 y el 9, que es 4, se escribe encima del 2, y tendrás la proporción; esto es, que del dinero menor pones 4 partes, y del mayor 3.

3	4
Onz p.	Onz. P.
9	2
5	

Tanto como excede la plata en 3 libras del dinero mayor, tanto le falta a la plata en 4 libras del dinero menor. Así, por ejemplo, en cada libra del dinero mayor la plata excede 4 onzas, que es la diferencia que hay entre el 5 y el 9; luego en tres libras la plata excede tres veces 4 onzas, que son 12 onzas, y 12 resulta del 3 puesto encima del 9, multiplicado por el 4 colocado encima del 2; y en una libra del dinero menor la plata se queda corta en 3 onzas, que es la diferencia que hay entre el 2 y el 5; luego en 4 libras del dinero menor la plata se queda corta en tres veces cuatro onzas, que son 12, que es lo que resulta de multiplicar el 4 está por encima del 2 por el 3 que está por encima del 9. Por eso se ponen 4 libras del dinero menor por cada 3 libras del dinero mayor. De modo similar, con cualquier parte o partes con que se pongan las 4 libras del dinero menor, hay que poner la misma parte o partes de las tres libras del dinero mayor. La proporción del dinero menor al mayor ha de ser siempre 4 a 3 (Fibonacci, 1202, p. 238 y 239).

Más adelante, en los libros de los siglos posteriores, la regla se presenta de modo razonado a partir de la proporción $\frac{B}{A} = \frac{(P_m - \mathrm{q})}{(\mathrm{p} - P_m)}$, como se muestra en el siguiente ejemplo:

¿Cuántas fanegas de trigo de a 55 reales y de trigo d 47 reales se han de mezclar, para que la fanega de trigo valga 50 reales?

Sean *x* las fanegas de trigo de a 55 reales, *y* las fanegas de trigo de a 47 reales: digo que

$$x : y : : 50 - 47 : 55\text{-}50$$

En efecto, cada fanega que se tome, para mezclar, de trigo de a 55 reales, produce una pérdida de 55-50 reales; luego las *x* fanegas producen la pérdida de (55-50)×*x* reales. Cada fanega de a 47 reales da una ganancia de 50 – 47 reales; luego las *y* fanegas dan (50-47)×*y* reales de ganancia. Mas como queremos que el valor total de las fanegas que entran en la mezcla, sea el mismo antes y después de mezclarse, la pérdida que producen las unas debe ser igual a la ganancia que dan las otras; luego (55-50)×*x*= (50-47)×*y*. De donde resulta la proporción x:y :: 50-47 :: 55–50 (Cortázar, 1863, p. 163).

Esta razonamiento explica la disposición práctica tradicional, ya sea en filas (como en Fibonacci) o en columnas: Se ordenan los precios de las especies o géneros, de mayor a menor (o de menor a mayor), arriba y abajo, o a la izquierda y derecha, del precio medio que está a la izquierda en otra columna, o abajo en otra fila. Se ponen las diferencias invirtiendo su posición, a la derecha o encima, porque la razón entre las diferencias es la razón inversa que se busca. La solución que se obtiene no es única, ya que se trata de una razón.

En columnas			En filas	
p	$P_m - q$	P_m el precio medio	$P_m - q$	$p - P_m$
P_m		p el precio mayor		
q	$p\text{-}P_m$	q el precio menor	p	q
			P_M	

Cuando la mezcla es de más de dos componentes se reduce el caso al de dos, para lo cual se hallan "por la regla anterior las cantidades que se deben tomar de dos especies cuyos precios comprendan al precio medio; se hallará igualmente las cantidades de otras dos especies cuyos precios comprendan al precio medio; y así se continuará, hasta que se conozcan las cantidades que deben tomarse de todas las especies" (Cortázar, 1863, p. 167). Por ejemplo, si son tres las componentes, habría dos cuyo precio sería mayor o menor que el medio. Se toman las diferencias que van de cada precio particular al precio medio y se apuntan alternadas, a la derecha de las componentes. Cuando al lado de un precio hay varias diferencias, se suman. En el caso de que haya dos precios menores que el medio la razón de las cantidades que hay que tomar es la de la tabla siguiente:

	P_a	$(P_m-P_b)+(P_m-P_c)$
P_m		
	P_b	P_a-P_m
	P_c	P_a-P_m
		$\frac{(Pm-Pb)+(Pm-Pc)}{Pa-Pm}$

Los ejemplos siguientes ilustran los casos de tres y cuatro componentes

Supongamos que hay tres clases de te: uno de a 80 reales la libra, otro de a 60 reales y otro de a 57, y que se pregunte en qué razón se han de mezclar para que se pueda vender a 72 rs. la libra. Dispondremos los términos en esta forma (A) y hallo que por cada 8 libras de a 60 y de a 57 que mezcle, deberé mezclar 27 del de a 80 rs. (Vallejo, 1821, p. 321 y 322)

A

80 … 12+15

72

60 … 8

57 … 8

¿Cuántas libras de café de a 11 reales, de a 9 reales, de a 6 reales, de a 5 reales y de a 2 reales se deben mezclar, para que resulte café a 8 reales?

11 … … 2 … … 6
9 … … … 3
8
6 … … .3
5 … … … 1
2 … … … … …

Resulta que se pueden mezclar 2 libras de a 11 reales con 3 libras de 6 reales, y se tendrán 5 libras de a 8 reales; 6 libras de a 11 reales con 3 libras de a 2 reales, y se tendrán 9 libras de a 8 reales; 3 libras de a 9 reales con 1 libra de a 5 reales, y se tendrán 4 libras de a 8 reales. Luego mezclándolas todas, tendremos 18 libras de a 8 reales (Cortázar, 1863, p.167).

Al asignar las letras *x, y*, … a las cantidades que se buscan, de la relación fundamental (I) se sigue la ecuación lineal que resuelve el problema:

$$px + qy = (x+y)P_m \; ; \; (p-P_m)x=(P_m-q)y$$

La lectura analítica de esta ecuación lineal dice que las cantidades de los componentes de la aligación están en razón inversa o alterna a las diferencias entre los precios y el precio medio:

$$x/y=(P_m-q)/(p-P_m)$$

En consecuencia, si no se aportan más datos el planteamiento general de la aleación alternada es indeterminado, ya que admite una infinidad de soluciones. Para que estos problemas sean determinados se necesita aportar datos adicionales al enunciado, lo que se puede hacer de dos maneras: si el dato adicional es la cantidad de algunas de las componentes la aligación alternada se llama parcial, y si se el dato adicional es la cantidad total de la mezcla la aligación se llama total.

Aligación alternada o inversa Total y Parcial

En la Aligación Total se trata de determinar las cantidades en que entran los componentes de la mezcla conocidos los precios de las componentes, el precio medio de la mezcla y la cantidad total de la mezcla. En la Aligación Parcial se trata de determinar la cantidad con que entra una de las componentes de la mezcla, sabiendo los precios de las componentes, el precio medio, y las cantidades con que entran el resto de las componentes.

Total. De pólvora de 8 grados, de 5 y de 3, se quieren hacer 68 arrobas de a 7 grados: se pregunta lo que se ha de poner de cada una (Justo, 1782, p. 145).

Parcial. Un tratante quiere mezclar 10 fanegas de trigo de a 60 reales la fanega con trigo de a 42 reales y trigo de a 28 reales la fanega para vender el montón a 48 reales la fanega, ¿cuántas fanegas de cada una de las últimas suertes de trigo han de entrar en la mezcla (Bails, 1790, p. 138).

La lectura aritmética de los problemas de aligación parcial y total combina el procedimiento general con dos o más reglas de tres, porque en estos casos hay que prorratear (repartir proporcionalmente) la cantidad total o parcial conocida en la razón en que entran las cantidades en la mezcla.

Total. De pólvora de 8 grados, de 5 y de 3, se quieren hacer 68 arrobas de a 7 grados: se pregunta lo que se ha de poner de cada una. Comparo los términos como aparece y se ha dicho, y tendré

8 … 2 y 4 = 6
7 5 … 1
3 … 1
8

sumando las diferencias, 8 arrobas de 7 grados, compuestas de 6 arrobas de 8 grados, 1 de 5, y otra de 3; pero como no han de ser 8, sino 68 las que se han de hacer, formaré esta regla de tres: 8 suma de las diferencias, a 68 cantidad que ha de resultar, así cada diferencia a la cantidad que se ha de tomar, esto es: 6 : x = 51; 8 : 68 :: 1 : x = 8 ½ ; 1: x = 8 ½ (Justo, 1782, p. 145)

Parcial. Un tratante quiere mezclar 10 fanegas de trigo de a 60 reales la fanega con trigo de a 42 reales y trigo de a 28 reales la fanega para vender el montón a 48 reales la fanega, ¿cuántas fanegas de cada una de las últimas suertes de trigo han de entrar en la mezcla.

60 6 20 26
48
42 12 12
28 12 12

Digo, pues, 26 : 10 : : 12 : R, o 13 : 5 : : 12 : 4^{fan} 7^{cel}. Entrarán por lo mismo en la mezcla 4 fanegas y unos 7 celemines (Bails, 1790, p. 138).

La lectura algebraica de estos problemas elude el prorrateo al incorporar directamente a la ecuación el dato adicional. En la aligación total esto da lugar a un sistema de dos ecuaciones lineales, inmediatamente reducible a una sola ecuación lineal:

$$px + qy = (x+y)P_m \; ; \; x+y=C \rightarrow px + q(C-x) = CP_m$$ (siendo C la cantidad total)

El siguiente ejemplo tomado de Stifel (1544) ilustra el procedimiento presentando los datos tabularmente, tal y como se acostumbraba hacer en el siglo XVI.

Se tienen dos clases de vino, una vale a 12 d [la unidad de medida], y la otra a 15 d [la unidad de medida]. se quieren mezclar para que valgan 13 d [la unidad de medida]. Pregunta. ¿Cuánto vino hay que poner de cada clase? Haz x la cantidad de vino de una clase, la otra será 1-x. Disponlo todo como en el ejemplo (Stifel, 1544, p. 266 dcha.). [Nota: Obsérvese que Stifel toma la cantidad total igual a 1].

cant		cant	
1	12	x	Hace 12x
1	15	1-x	Hace 15-15x

De 12x + 15-15x = 13 sale x=2/3

1	12	2/3	Hace 8

1	15	1/3	Hace 5

El planteamiento general de los problemas de aligación total es en los siguientes términos:

Total. Se quiere formar una mezcla de T kg de café a P ptas. el kg con dos clases distintas. El precio de la primera es p ptas. el kg y el de la segunda p' ptas. el kg. ¿Cuántos kg habrá de cada clase? Llamemos x = número de kg que hay de la primer. Número de kg que hay de la segunda T – x. Valor total de la mezcla TP. Valor de los x kg a p ptas. kg. xp. Valor de los (T-x) kg a p' ptas. kg. (T-x)p'.

Ha de verificarse, TP = xp + (T-x)p'. Ecuación lineal de primer grado que resuelta da:

TP = xp + Tp' + xp' $\rightarrow$ x = $\frac{T(P-p')}{p-p\prime}$. Conocido x se calcula T-x (García, 1959, p. 109).

En la aligación parcial la ecuación se obtiene directamente:

Parcial. ¿Cuántos litros de vino de 3 euros/L hay que mezclar con 40 litros de vino de 2 euros/L para obtener vino a 2,75 euros/L. Sol. *3x+40·2=(x+40)·2.75, x=120* litros de a 3 euros/UL (MacGraw-Hill, Matemáticas. ESO adultos)

A menudo los problemas de aligación presentan una interminación aparente, ya que se plantean con un sistema de ecuaciones de más incógnitas que ecuaciones. Es el caso del siguiente ejemplo:

Cierto obispo ordenó repartir 12 panes entre el clero. Previó así que cada sacerdote recibiera dos panes; un diácono medio y un lector la cuarta parte. Obrando así el número de clérigos y de panes resulta el mismo. Diga, quién quiera, ¿cuántos sacerdotes, diáconos y lectores debe haber? (Alcuino, 47, 804, p. 1155). [La lectura analítica da lugar a un sistema de dos ecuaciones que tendría infinitas soluciones: *x+y+z=12; 2x+y/2+z/4=12* $\rightarrow$ 2x+y/2+(12-x-y)/4=12 $\rightarrow$ 7x+y=36 si no se tuviera en cuenta que x, y, z son enteros <12; x=5, y=1, z=6]

Epílogo

Los problemas de aligación parecen tener cada vez menos importancia en la enseñanza actual, tal vez porque es obvio que los contextos de compra-venta de productos que se mezclan para obtener otros de un precio medio y las aleaciones de metales ya no son forman parte de la vida diaria, ni son de interés para el currículum obligatorio; sin embargo estos dos contextos clásicos perduran en los libros de texto actuales. En cualquier caso, el hecho es que hay otros contextos más cotidianos, más cercanos, o del ámbito de las ciencias, en los que es necesario saber calcular el promedio o aplicar los métodos de la aligación inversa, para ello, es necesario tener presente la condición fundamental de los problemas de aligación y saber hacer su lectura analítica, porque en ella se sustenta su enfoque de resolución, ya sea aritmético o algebraico.

Como se ha intentado mostrar en esta comunicación, el análisis histórico epistemológico ha sido la metodología apropiada para revelar la riqueza del conocimiento matemático que en relación con los problemas de aligación ha configurado la humanidad.

Con ello se ha pretendido aportar generalidad y claridad metodológica para el provecho de los profesores. Ahora su reto es mantener viva esa riqueza de conocimientos, evitar que caiga en el olvido, y aprovecharla, adaptándola a las características de los estudiantes, de las necesidades de la vida y del currículum actual, para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias y bibliografía

Alcuino (804). Propositiones ad acuendos juvenes. En J. P. Migne *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae*, Tomus 101, Paris, 1863, columnas 1143-1160.

Anaya. (2005). *Matemáticas 1. Aplicadas a las CC.SS. Bachillerato Educación*. Madrid: Grupo Anaya.

Bails B. (1790). *Arismética para negociantes*. Madrid: La viuda de Ibarra.

Cortázar, J. (1863). *Tratado de Aritmética*. Decimosexta edición. Madrid: Imprenta de D. F. Sánchez.

Dalmáu, J. (1897). *Resumen de las lecciones de Aritmética aplicadas a las diferentes cuestiones mercantiles*. Gerona: Editorial Dalmau Carles Pla, S. A.

Euler, l. (1822). *Elements of algebra*. Londres. Harvard College Library.

Fibonacci [Leonardo Pisano] (1202). *Liber Abaci*. Trad al inglés en Sigler, 2002.

García, J. (1959). *Matemáticas tercer curso*. Alcoy: Editorial Marfil.

Gómez. B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilón*. Vol. 28(1), nº 77, pp. 9-22.

Jiuzhang suanshu (c. 100), traducido al inglés en Shen, Crossley y Lun, 1999.

Justo, J. (1782). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Por D. Joachin Ibarra Impresor de Cámara de S.M.

Lacroix, S. F. (1821). *Curso Completo elemental de matemáticas puras*. Trad. de Josef Rebollo y Morales. Tomo II. Algebra. Madrid: Imprenta Real.

Luis Vives (1950). *Matemáticas cuarto curso por Edelvives*. Zaragoza: Luis Vives

McGraw-Hill (2005). *Matemáticas: Educación Secundaria para adultos*. MacGraw-Hill. España.

Metrodorus (c. 500). *Palatine collection, o Greek anthology*, traducido al inglés en Page et al. 1916.

Ortega, J. (1537). Compusición de la Arte de la Aritmética y juntamente de Geometría. Sevilla: Jacom Combreger (1ª ed. 1512).

Page, T. E. et al. (eds.) (1916). *The greek anthology*. Loeb Classical Library, vol. 5, Harvard U. Press, Cambridge.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática*. *Actas del VII Simposio de la SEIEM*, pp. 97-108. Universidad de Granada: Granada.

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En Rico, L.; Lupiáñez, J.L. y Molina, M. (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Santa Cruz, M. G. (1625). *Libro de Arithmetica especulativa, y practica, intitulado, el dorado contador, contiene la fineza y reglas de contar oro y plata, y los Aneajes de Flandes. Por moderno y compendioso estilo*. Madrid: impreso por la viuda de Alonso Martín.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Nueva York: Springer.

Silíceo (1514). Ars Aritmetica. En *Juan Martínez «Silíceo», «Ars Artimetica». Dividida en teórica y práctica*. Introducción, traducción y notas de E. Sánchez y J. Cobos. Cacéres. Universidad de Extremadura, servicio de publicaciones. 1996.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica Integra*. Norimberg: Johan Petreium.

Shen, K.; Crossley, J. N. y Lun, A. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford: Oxford University Press.

S.M. (1998). *Matemáticas 3º Secundaria*. Sigma. Madrid: SM.

Vallejo, J. M. (1821). *Tratado Elemental de Matemáticas, escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Tercera edición corregida y considerablemente aumentada*. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Barcelona: Imp del gobierno político superior.

Ventallol, J. (1521). *Practica mercantivol*. Lyon: mestre Jean de la Place.

Wentworth, G. A. (1900). *Aritmética práctica*. Boston: Gin y Compañía.

Vinot, J. (1860) *Récréations mathématiques*. Paris: Larousse et Boyer

O movimento histórico e lógico dos conceitos e a constituição do objeto de ensino da Álgebra.

Maria Lucia **Panossian**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
mlpanossian@utfpr.edu.br
Manoel Oriosvaldo de **Moura**
Universidade de São Paulo
Brasil
modmoura@usp.br

Resumo

A pesquisa apresentada nesta comunicação foi desenvolvida com o objetivo de investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. A partir de categorias do materialismo dialético e da teoria histórico-cultural, foram analisadas formas de pensamento, linguagem e formação de conceitos em registros de história da álgebra. Essa análise permitiu explicitar os nexos conceituais e caracterizar o que se considerou como a essência da álgebra: estabelecer a relação entre grandezas variáveis de forma geral. Posteriormente, esta relação essencial foi considerada como categoria para a análise sobre a constituição do objeto de ensino da álgebra. Este objeto foi reconhecido em propostas curriculares, no discurso de professores e em situações de ensino. Destacou-se que a essência e os nexos conceituais do conhecimento algébrico revelados no seu movimento histórico e lógico constituem-se em elementos centrais para constituição do objeto de ensino da álgebra.

Palavras chave: conceitos algébricos, movimento histórico e lógico, objeto de ensino, materialismo dialético; relação essencial da álgebra.

Introdução

Em pesquisa realizada anteriormente entre os anos de 2006 e 2008 (Panossian, 2008) foi possível reconhecer que os estudantes da 6ª série/7º ano (faixa etária de 12 a 13 anos) de uma escola pública brasileira tinham possibilidades restritas de compreender a essência de um conceito algébrico, pois nas situações apresentadas para serem desenvolvidas por eles, predominavam os aspectos técnicos e sintáticos relacionados aos conceitos algébricos. Dessa forma, por exemplo, os estudantes manipulavam variáveis, sem compreender o conceito subjacente a elas.

Tornou-se uma necessidade, pesquisar sobre a relação entre a especificidade do conhecimento algébrico e a sua apresentação no ensino, identificando-se o objeto de ensino da álgebra como objeto de pesquisa realizada entre os anos de 2011 a 2014 (Panossian, 2014). A partir do método materialista dialético (Ilyenkov, 1977; Cheptulin, 1982) e dos princípios da

teoria histórico-cultural (Vigotski, 2001) e da teoria da atividade (Leontiev, 1983,1975), tomou-se como hipótese a ser verificada: "O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos revela fundamentos para constituição do objeto de ensino da álgebra possibilitando a análise de forma crítica de situações e ações de ensino de álgebra, visando a formação do pensamento teórico dos estudantes".

Nessa pesquisa, a história e a filosofia da matemática são consideradas como fundamento para constituir e analisar o objeto de ensino da álgebra e não como instrumento didático-metodológico ou recurso de aula. Considera-se que a álgebra apresentada na escola é derivada da álgebra que, historicamente, se constituiu na experiência humana, mas o objetivo na escola é a apropriação do conhecimento algébrico como elemento que potencializa a formação dos estudantes. Assim, pressupõe-se que o objeto de ensino da álgebra contempla os nexos conceituais e a essência do conhecimento algébrico, e ainda mais que o modo de organização do ensino possibilita a apropriação desta forma de conhecimento e a formação e o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes (Davydov, 1982).

Definiu-se como objetivo da pesquisa investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra revelado em propostas curriculares e nas ações dos professores. A existência de tais relações não é questionada, pois não é possível conceber um objeto de ensino que não tenha relação com o objeto da ciência a que se refere (no caso, a álgebra). Entretanto, entende-se que a especificidade do conhecimento algébrico a partir de seu desenvolvimento histórico não pode ser considerada somente para se elaborar uma lista de tópicos de estudo ou para que se argumente, por exemplo, que as equações devem ser ensinadas antes das funções, por ter sido este o desenvolvimento cronológico. Assim, a explicitação das relações entre o movimento histórico e lógico e a organização do ensino da álgebra se constituía como propósito da pesquisa, buscando compreender critérios que orientam a seleção de 'quais' conhecimentos algébricos são ensinados e 'para que' são ensinados.

Método e metodologia da pesquisa

No movimento da pesquisa, muitos questionamentos foram formulados, entre eles: Qual, ou o que é considerado como objeto de ensino da álgebra? Onde se manifesta o objeto de ensino da álgebra? Destas e outras questões derivou-se a pergunta condutora da pesquisa "Que princípios orientam a constituição de um objeto de ensino, em particular, da álgebra?". Entende-se que a formulação desses princípios se vincula a concepções de homem, de ensino, de conhecimento entre outras e, portanto, têm dimensões sociais, psicológicas, epistemológicas, políticas etc. As concepções adotadas nessa pesquisa estão pautadas nos fundamentos da teoria histórico-cultural (Vigotski, 2001) e da teoria da atividade (Leontiev, 1983, 1975) a partir do método materialista-dialético.

Nesse artigo são destacados dois elementos essenciais para atingir o objetivo da pesquisa e que geraram as duas principais ações da pesquisa: I) o modo como o conhecimento é constituído na experiência humana, particularmente o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e II) o modo de organização do ensino visando a formação do pensamento teórico dos estudantes, particularmente a constituição do objeto de ensino da álgebra.

Tomou-se como premissa que para compreender o movimento de formação do conhecimento em seu desenvolvimento histórico, é necessário compreender as circunstâncias que geraram os fatos históricos e que, portanto, permitiram seu movimento lógico. E nesse sentido a categoria dialética histórico/lógico foi destacada fundamentada em Engels (1859)

> A história procede frequentemente por saltos e em ziguezague e, se houvesse que segui-la ao mesmo tempo por toda a parte, teria não apenas de recolher muito material de pouca importância, como também o curso do pensamento teria frequentemente que ser interrompido; além disso, não se poderia escrever a história da economia sem a da sociedade burguesa e, deste modo, o trabalho tornar-se-ia infindável, uma vez que faltam os trabalhos preparatórios. Portanto, o modo lógico de tratamento era o único que estava no seu lugar. Este [modo], porém, não é de facto senão o histórico, despido apenas da forma histórica e das casualidades perturbadoras. Por onde esta história começa, por aí tem de começar igualmente o curso do pensamento, e o seu avanço ulterior não será mais do que o reflexo, numa forma abstrata e teoricamente consequente, do decurso histórico; um reflexo corrigido, mas corrigido segundo leis que o próprio decurso histórico real fornece, na medida em que cada momento pode ser considerado no ponto de desenvolvimento da sua plena maturidade, da sua forma clássica (p. 2).

Além disso, considera-se a existência de correlações entre a história social dos homens e a história do desenvolvimento de um sujeito. Não por que a história do sujeito repete a história humana, mas sim por que o desenvolvimento dos sujeitos (singular) influencia o desenvolvimento social do gênero humano (universal) e vice-versa.

Por considerar estas interrelações, nessa pesquisa, o movimento histórico e lógico dos conceitos, foi objeto investigado e posteriormente se tornou categoria de análise do objeto de ensino da álgebra. A compreensão dos fenômenos (o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e a constituição do objeto de ensino da álgebra) foram conduzidos na dinâmica característica da lógica dialética que expressa a relação entre o singular, o particular e o universal. Como ponto de partida, foram consideradas as formas singulares de manifestação (do objeto da álgebra e do objeto de ensino da álgebra) para que a análise de suas particularidades conduzisse a princípios universais. Sem esquecer que a própria singularidade é um recorte da realidade e já contém em si elementos da 'universalidade' até o estágio em que foi possível atingir na experiência humana em seu movimento histórico e lógico.

O primeiro movimento da pesquisa foi o de investigação e estudo sobre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, buscando compreender as necessidades humanas que geraram esse conhecimento (Engels, 1859; Cheptulin,1982, Kopnin,1978, Kosik,1976, Prado Jr, 1963), assumindo que o "lógico" enquanto movimento do pensamento, está relacionado ao movimento "histórico" dos fenômenos do mundo objetivo. Nesse processo, "a lógica torna-se concreta e a história torna-se inteligível, conectado o seu movimento ao das contradições do pensamento" (Lefebvre & Guterman, 2011, p. 17).

Nesse sentido, entende-se que os princípios e categorias do materialismo dialético é que permitem além de identificar, caracterizar e classificar objetos e fenômenos, dar conta de seu movimento e da relação entre eles. Assim, em busca de revelar a essência do conhecimento algébrico, identificando os nexos conceituais dessa forma de conhecimento, foram analisados os episódios singulares da história da álgebra obtidos por levantamento bibliográfico (Aleksandrov, 1988; Baumgart, 1992; Caraça, 1952; Contador, 2007; Eves, 1995; Hogben, 1970; Karlson, 1961; Klein, 1992; entre outros). Tais singularidades foram analisadas a partir de categorias do materialismo dialético (abstrato/concreto; qualidade/quantidade; fenômeno/essência; forma/conteúdo; geral/particular) em suas particularidades, ou seja, formas de pensamento relacionadas, manifestações da linguagem, formação de conceitos etc. este movimento da pesquisa possibilitou reconhecer o significado atribuído à expressão 'movimento histórico e lógico dos conceitos', bem como caracterizar a essência do conhecimento algébrico.

O segundo movimento da pesquisa foi o de investigação e análise do objeto de ensino da álgebra tomando como singulares os isolados[1] do ensino da álgebra que foram analisados em suas particularidades nos fenômenos em que se manifesta (programas curriculares, registros de fala de professores e situações enunciadas de ensino), usando como categoria de análise o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos. Como dados de pesquisa para este movimento foram considerados: análise de pesquisas já desenvolvidas que estão relacionadas ao objeto de ensino da álgebra (Fiorentini, Miorim & Miguel, 1993; Usiskin, 1995; Lins & Gimenez, 1997; Cury, Lannes, Brolezzi & Vianna, 2002; Stacey, Chick & Kendal, 2004; Sousa, 2004; Schmittau & Morris, 2004; Ursini, Escareno, Montes & Trigueros, 2005; Radford, 2011; entre outros); análise de programas curriculares (São Paulo, 1988; Brasil, 1998; São Paulo, 2008 entre outros); elaboração e análise de dados obtidos em um curso de atualização para oito professores da rede pública do Estado de São Paulo, especialmente organizado para esta pesquisa e desenvolvido durante o primeiro semestre de 2011 intitulado "Atividades de Ensino de Álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico cultural".

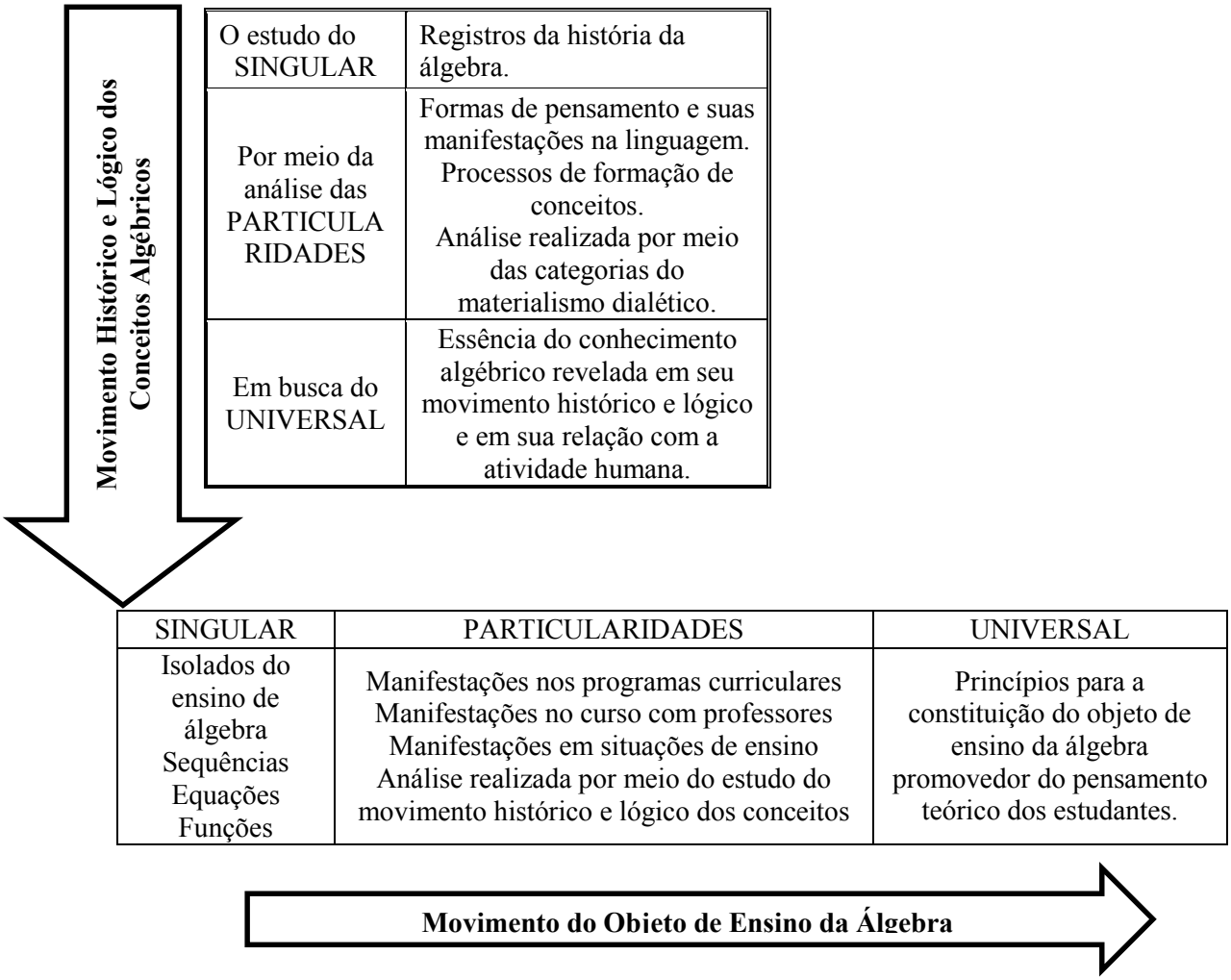
O curso com os professores teve como objetivo discutir durante encontros semanais (total 36 horas) os princípios da organização do ensino de álgebra ao longo dos anos de escolaridade e constituiu-se como ação metodológica de pesquisa com duas funções principais: captar dados do discurso dos professores em exercício e compreender o objeto de ensino da álgebra em sua concreticidade, como se revela nas ações de sala de aula; e elemento particular que possibilitou a mediação entre o singular (isolados do ensino da álgebra) e o universal (princípios teóricos para a constituição do ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes).

Ainda para análise do objeto de ensino da álgebra foram recolhidos dados a partir de uma situação singular, as ações de planejamento entre pesquisadora e professora para uma turma de estudantes da 6ª série de uma escola municipal de São Paulo, sobre o ensino de equações. O objetivo específico dessa ação de pesquisa foi o de reconhecer o modo como elementos do movimento histórico e lógico dos conceitos se fariam presentes nas ações de ensino, de forma a potencializar a apropriação do que foi considerado como essência do conhecimento algébrico. Dessa forma, o planejamento teve como base teórica os conceitos da teoria histórico-cultural (mediação, apropriação, internalização, categoria abstrato/concreto; pensamento empírico e teórico etc.) e as discussões desenvolvidas durante o curso de atualização.

Reitera-se que o universal explicitado no primeiro movimento da pesquisa acerca do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos se constituiu como categoria de análise no segundo movimento da pesquisa sobre o objeto de ensino da álgebra. Na impossibilidade de avançar linearmente com esses dois movimentos, e considerando a necessidade de 'idas' e 'vindas' nesse processo, os estudos foram conduzidos na dinâmica representada a seguir.

[1] O conceito de isolado foi compreendido a partir de Caraça (1952). Esse autor afirma que "Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e factos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados" (p.112). Assim, um isolado é um recorte da realidade, e que se não for convenientemente determinado pode conduzir ao aparecimento de inesperados (situações ou fenômenos que, por sua vez, levam a melhor determinação do isolado).

Esquema 1
Orientação da análise realizada durante a pesquisa



Principais resultados

A busca desta pesquisa se insere na relação entre a álgebra como objeto da ciência e objeto de ensino. Porém, os conteúdos do ensino não são vulgarizações ou simples adaptações de conhecimentos científicos (Chervel, 1990), nem transpostos diretamente da ciência algébrica.

É necessário, então, compreender como se desenvolve o conhecimento algébrico na atividade humana (objetivação do conhecimento); como ocorre a atividade humana de apropriação do conhecimento, e de que forma o conceito algébrico pode ser tratado como objeto de ensino sem que perca sua especificidade. Os objetos de ensino de qualquer ciência, e nesta pesquisa em particular, do conhecimento algébrico, devem ser constituídos por elementos fundamentais que instrumentalizem e desenvolvam o pensamento teórico dos estudantes.

No decorrer da pesquisa, derivaram-se algumas sínteses teóricas, a seguir explicitadas. Destaca-se inicialmente que o estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos não se confunde com o estudo da história da álgebra que organiza os fatos conforme tempo e espaço, destacando possíveis causas e consequências de seu acontecimento. O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos recorre aos elementos investigados pelos historiadores

da álgebra e destaca dimensões filosóficas e psicológicas, ressaltando o movimento do pensamento que conduziram a tais fatos e acontecimentos. Em relação ao objeto de ensino da álgebra, o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos não se caracteriza como uma nova estratégia metodológica ou didática de abordagem dos objetos de ensino. Assim como não se trata de estudar episódios de história da álgebra e reorganizá-los para apresentação didática com a intenção de que eles gerem necessidades ou interesse nos estudantes.

A partir do movimento histórico e lógico dos conceitos, reconheceu-se que a álgebra como conhecimento matemático se constitui e adquire significado no que oferece de possibilidades para interpretação da fluência e do movimento da realidade objetiva. Assim como outros campos da ciência, como afirma Caraça (1952), ela tem por papel criar quadros interpretativos da realidade. Como conhecimento científico, objetiva criar um quadro interpretativo da realidade movente, fluente, e, nesse sentido, se caracteriza essencialmente pela busca da **relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral**, sendo esta sua relação teórica essencial ou célula. As formas com que essa essência ou célula se desenvolve também se alteram conforme a experiência historicamente acumulada.

Sendo o conhecimento científico historicamente determinado, é necessário considerar o grau de conhecimento adquirido em determinado momento histórico (Vigotski, 2001). Reconhecer esse movimento, que é histórico e lógico dos fenômenos e do desenvolvimento da ciência, permite a superação das aparências. Isso por que o conhecimento não avança somente por meio das sensações e percepções imediatas dos sentidos sobre a realidade objetiva e o estabelecimento de leis empíricas (Prado Jr, 1963) e os conceitos não se formam como representações individualizadas e separadas umas das outras, mas se formam no curso das atividades dos indivíduos que constituem a coletividade, por formas de pensamento teóricas.

Os conceitos formados nos processos de generalização e abstração teóricas contemplam em si os dados da percepção, do sensorial, mas não se reduzem a ele, refletem o singular e o particular, ao mesmo tempo em que o geral reflete a essência do objeto. Essência essa que pode ser nesta pesquisa revelada no estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos, por categorias da lógica dialética.

Reconhecendo esse movimento de constituição de um conceito, é que se procurou estudar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos em busca de elementos que então constituíram os nexos conceituais desta forma de conhecimento. No decorrer deste estudo, destacaram-se os seguintes elementos: a fluência e o movimento reconhecido nos objetos e fenômenos da realidade objetiva; o controle das quantidades do concreto sensível: o movimento dos campos numéricos; o movimento da linguagem e dos modos de resolução de problemas como forma e conteúdo do conhecimento algébrico; entre o elemento desconhecido e o elemento que varia: o reconhecimento de grandezas variáveis; a necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos.

Esses elementos foram se revelando por meio de episódios históricos da álgebra, e foram destacados somente para a exposição nesta pesquisa, mas considera-se que estão inter-relacionados formando o que seriam os nexos conceituais do conhecimento algébrico. Da compreensão desses nexos conceituais, considerou-se como relação estável (essência, ente geral ou célula) do conhecimento algébrico, o estabelecimento de **relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral**.

Esta relação teórica essencial foi compreendida como categoria de análise dos elementos singulares do objeto de ensino da álgebra. Convém destacar que essa relação teórica essencial não se confunde com o objeto de ensino da álgebra, mas espera-se que o constitua.

A partir do que foi revelado como essência do conhecimento algébrico e seus nexos conceituais, foi possível avançar para o segundo movimento de análise, relativo à constituição do objeto de ensino da álgebra. Destacou-se a necessidade de que o objeto de ensino da álgebra seja constituído por ações de ensino que destaquem a identificação das grandezas, as possibilidades de que sejam quantificadas e admitam variação de quantidades, para então estabelecer relações entre tais grandezas de forma geral.

Foram definidos como formas singulares as sequências, equações e funções por serem elementos recorrentes no processo de ensino e principalmente por revelarem, em suas singularidades, a essência do conhecimento algébrico. Como fenômenos particulares em que se manifesta o objeto de ensino da álgebra, foram definidos os programas curriculares, o curso preparado para professores da rede pública e as situações enunciadas de ensino.

No decorrer das análises, foi possível reconhecer que as equações, sequências e funções podem ser consideradas como instrumentos do conhecimento algébrico que possibilitam que a relação quantitativa entre as grandezas variáveis se manifeste.

Pode-se considerar que, desde tempos remotos, a humanidade determina incógnitas para solucionar problemas do cotidiano e para tanto necessita reconhecer algumas grandezas e a relação entre elas, ainda que tal relação seja singular, ou seja, destacada apenas para uma determinada situação-problema. Assim, as equações constituíram o instrumento próprio para determinar os valores desconhecidos nas situações-problema relacionando-os aos valores conhecidos. O aperfeiçoamento dos métodos de resolução das equações, bem como de seu registro simbólico, permite que esse instrumento seja usado não só para resolver problemas cotidianos e bastante específicos, mas outros problemas de ordem geral.

Por sua vez, as sequências e funções possibilitam que a relação entre as grandezas seja compreendida no que a caracteriza como essência, mas também em suas particularidades, no seu movimento. Por meio das sequências e funções, expressam-se leis gerais da relação entre as grandezas, sendo contemplada a variação dessas grandezas. Roque (2013) ressalta uma diferença do conceito de função em relação ao de equação. Nessa última, há uma quantidade momentaneamente desconhecida e a resolução da equação tem o objetivo de encontrá-la, mas reconhece a diferença entre as equações determinadas. Isto significa que é possível "determinar" os valores desconhecidos e as "indeterminadas", para as quais se encontram infinitos valores que variam, de certa forma, em relação às quantidades determinadas. Nesse sentido, uma equação em x e y também é uma forma de representar a dependência entre duas quantidades variáveis, por exemplo, a equação de uma circunferência a partir das variáveis x e y, mas que não se caracteriza como uma função.

No quadro a seguir destaca-se como se entende que cada um desses instrumentos (sequências, equações e funções) revela a essência do conhecimento algébrico e como se pode analisar que são conduzidos no processo de ensino.

Quadro 1
A essência do conhecimento algébrico e a organização do ensino.

Instrumentos	Como se revela a essência da álgebra	Como é tratada no ensino
SEQUÊNCIAS	Para estabelecer uma sequência a partir de elementos quantitativos, é necessário reconhecer que grandezas estão inter-relacionadas, e de que forma essa relação ocorre. Compreendendo essa relação, é possível gerar uma "lei geral" que a expresse.	Enfatiza-se a definição de uma "lei geral" pela relação de ordem entre os elementos particulares que aparecem na sequência, mas não se destaca a identificação das grandezas relacionadas.
EQUAÇÕES	Uma equação estabelece um momento singular da relação entre grandezas. Por isso, permite encontrar valores singulares e definidos para cada um dos seus elementos. Assim, encontrar o "x" em uma equação, denominado como incógnita, significa encontrar o valor de uma grandeza variável, mas que naquele momento específico está definido ainda que desconhecido.	Destaca-se a necessidade de encontrar o valor desconhecido na equação, por meio de técnicas de resolução. Identifica-se a equação com uma pergunta (São Paulo, 2009), mas não se destacam as grandezas envolvidas, nem a relação entre elas. Desta forma, a equação não é entendida como uma forma singular da relação entre grandezas, mas tratada de forma técnica.
FUNÇÕES	O avanço do estudo de diferentes funções (de 1º e 2º graus, exponencial, logarítmica, modular, trigonométricas e outros) abarca a essência do conhecimento algébrico em sua forma mais desenvolvida. Por meio das funções, se identificam e relacionam grandezas de naturezas diferentes (numéricas, matriciais, vetoriais, trigonométricas e outras), por meio de diferentes operações matemáticas. O estudo avançado das funções permite que se observem propriedades e se criem expressões gerais que apanhem o movimento dos fenômenos na realidade objetiva, na medida em que se reconhecem neles certas regularidades.	No ensino, são enfatizadas as características de diferentes funções: as raízes das funções, seus gráficos, o estudo do sinal da função. As funções são em geral tratadas como objetos com fim em si mesmos, e aprofundadas matematicamente. Entretanto, o significado de uma função como instrumento para compreender a realidade não é destacado, e o reconhecimento das diferentes grandezas e suas relações se torna um conhecimento em segundo plano.

O objeto de ensino da álgebra também não pode conter em si todo o conhecimento algébrico acumulado na experiência histórica humana. É impossível considerar que em alguns anos de escolaridade de um sujeito ainda em formação lhe sejam apresentados todos os conhecimentos acumulados em séculos de desenvolvimento. Entretanto, esse objeto de ensino deve conter a totalidade concreta da álgebra, uma estrutura que permite a compreensão de cada fato, objeto, fenômeno e a inter-relação entre eles, como nos esclarece Kosik (1976): "O concreto, a totalidade, não são, por conseguinte, todos os fatos, o conjunto dos fatos, o agrupamento de todos os aspectos, coisas e relações, visto que a tal agrupamento falta ainda o essencial: a totalidade e a concreticidade" (p. 36).

O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos necessita de elementos filosóficos, epistemológicos e psicológicos e a sua apropriação pode orientar as concepções de

professores a respeito do que é a álgebra. Para que tais concepções sejam modificadas, é necessário que se tenha clareza em relação ao que se concebe como conhecimento algébrico, reconhecendo seus nexos conceituais e sua essência. Essa modificação na concepção dos professores em relação ao conhecimento algébrico possibilita o movimento da didática, da reorganização do ensino.

Conclusões

A partir da pesquisa derivaram-se algumas implicações para a elaboração de programas curriculares e para o modo de ação dos professores sobre a organização do ensino, que requerem constantemente novas pesquisas.

Ainda que a formação do conceito no indivíduo (ontogênese) não siga totalmente o processo de formação dos conceitos na espécie humana (filogênese), não se pode desconsiderar que o estudo de como o conhecimento algébrico se desenvolveu na espécie humana apresenta elementos fundamentais que podem contribuir para a superação de impasses epistemológicos na formação do indivíduo. Segundo Davydov (1982, p. 6):

> Coluna vertebral da disciplina é seu programa, ou seja, a descrição sistemática e hierárquica dos conhecimentos e artes que procede assimilar. O programa, determinante do conteúdo da matéria, estabelece os métodos do ensino, o caráter do material didático, os prazos de estudo e outros elementos do processo docente. E, o que é mais substancial, ao indicar a estrutura dos conhecimentos assimiláveis e o método de sua coordenação, o programa projeta esse tipo de pensamento que se forma nos alunos ao assimilar isto no material de estudo proposto.

Assim, pode-se considerar que definir os conceitos que irão compor o conteúdo de ensino, que faz parte de um programa, não é tarefa de menor importância, pois não se trata de apresentar o conteúdo na forma de produto da ciência a que corresponde, mas sim explicitar as conexões lógicas de desenvolvimento dessa ciência como forma de interpretar a realidade. A partir disso, se organizam as demais condições metodológicas e didáticas.

O papel do movimento histórico e lógico dos conceitos no processo de ensino é o de conduzir os estudantes no movimento da história humana, com os problemas, dúvidas e necessidades que a humanidade se deparou e superou. É fundamental para o estudante compreender os momentos nos quais o conhecimento algébrico foi necessário, de que forma foi sendo utilizado, como forma de pensamento e linguagem e interpretação dos fenômenos da realidade objetiva, e para tanto a essência do conhecimento algébrico, revelada pelo movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, precisa constituir os objetos de ensino nas programações curriculares.

Assim, a relação estabelecida entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra, a partir da definição do que se constitui como essência do conhecimento algébrico, gera implicações e transformações na organização do ensino, nos modos de ação dos professores, na definição de conteúdo dos programas curriculares, desde a escolha das situações a serem apresentadas aos alunos até os modos de encaminhamento da situação durante as interações em aula. É importante reforçar que não se trata de escolher ou listar situações de registros históricos da álgebra, mas sim que o essencial dos conceitos algébricos constitua o objeto da álgebra que compõe as situações de ensino apresentadas aos estudantes. Dessa forma, espera-se que a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto

de ensino da álgebra gere necessidades de aprendizagem dos estudantes e apropriação dos significados históricos e culturais em relação aos processos de conhecimento.

Algumas questões também necessitam ser constantemente discutidas no processo de formação de professores: Como apresentar o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos em diferentes situações de ensino? Como é possível realizar a mediação entre o que é o processo de formação de conceitos algébricos e a sua transformação como conteúdo de ensino?

A determinação cada vez mais precisa dos nexos conceituais da álgebra por parte dos professores e sua explicitação cada vez mais sistematizada em programas curriculares irá orientar a elaboração de atividades de ensino. Consequentemente, possibilitará o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes e a apropriação do conhecimento científico em movimento, e não apenas de seu produto específico que, por muitas vezes, adquire sentido somente para o matemático, não sendo elemento da atividade do estudante, ou tornando-se uma tarefa a ser executada com outros fins, por exemplo, de aprovação na escola.

Assim, reconhecer os elementos do conhecimento algébricos essenciais, que caracterizam seu movimento histórico e lógico e seu desenvolvimento como conhecimento científico produzido pela humanidade, revela a essência que constitui o objeto de ensino da álgebra.

Referências e bibliografia

Aleksandrov, A. D. (1988). *La matemática: su contenido, métodos y significado* (7ª ed.). Madrid, Espanha: Alianza Universidad.

Baumgart, J. K. (1992). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: álgebra*. São Paulo, Brasil: Atual.

Brasil, Ministério da Educação. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, Brasil: MEC/SEB.

Caraça, B. J. (1952). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa, Portugal: Tipografia Matemática.

Cheptulin, A. (1982). *A dialética materialista: categorias e leis da dialética*. São Paulo, Brasil: Editora Alfa- omega.

Chervel, A. (1990). A história das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria e Educação*, *2*, 177-229.

Contador, P. R. M. (2007). *Matemática: uma breve história* (2ª ed.) São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.

Cury, H.N., Lannes, W., Brolezzi, A.C., & Vianna, C. R. (2002). Álgebra e educação algébrica: concepção de alunos e professores de matemática. *Educação matemática em Revista*, *4*(4), 9-15.

Davydov, V. V. (1982). *Tipos de generalización em la enseñanza*. Havana, Cuba: Pueblo y Educación.

Engels, F.; Marx, K. (1859). *Para a crítica da economia política*. Primeiro fascículo, Berlin: Franz Duncker. Disponível em http://www.marxists.org/portugues/marx/1859/08/15.htm

Eves, H. (1995*). Introdução à História da Matemática*. Campinas, Brasil: Editora Unicamp.

Fiorentini, D., Miorim, M.A., Miguel, A. (1993). Contribuições para um repensar: a educação algébrica elementar. *Pro-posições*, *4*, 78-91.

Hogben, L. (1970*). Maravilhas da matemática*. Porto Alegre, Brasil: Editora Globo.

Ilyenkov, E. (1977). The concept of ideal. In *Problems of dialectical materialism*. Progress Publishers. Disponível em: http://www.marxists.org/archive/ilyenkov/works/ideal/ideal.htm

Karlson, P. (1961). *A magia dos números*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Globo.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Massachusetts, EUA: Dover Publications.

Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro, Brasil: Civilização Brasileira.

Kosik, K. (1976). *Dialética do concreto*. Rio de Janeiro, Brasil: Paz e Terra.

Lefebvre, H., Guterman, N. (2011). Introdução. In W. Lenin, *Cadernos sobre a dialética de Hegel*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora UFRJ, 7-92.

Leontiev, A. N. (1975). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa, Portugal: Horizonte Universitário.

Leontiev, A. N. (1983). *Actividad, consciencia, personalidad*. (2nd ed.). Havana, Cuba: Pueblo y educación.

Lins, R.C., Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. São Paulo, Brasil: Papirus.

Panossian, M. L. (2008) *Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes: indicadores para a organização do ensino*. (Dissertação). Universidade de São Paulo, Brasil.

Panossian, M. L. (2014). *O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra*. (Tese). Universidade de São Paulo, Brasil.

Prado Jr, C. (1963). *Dialética do conhecimento* (4ª ed.). São Paulo, Brasil: Editora Brasiliense.

Radford, L. (2011). *Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia*. São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.

Roque, T. (2013*). História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, Brasil: Zahar.

São Paulo (1988). *Proposta curricular para o ensino de matemática: 1º. grau*. São Paulo, Brasil: SE/CENP.

São Paulo (2008). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo, Brasil: SEE.

São Paulo (2009). *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental* (6ª série, Vol.4). São Paulo, Brasil: SEE.

Schmittau, J., Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementar mathematics curriculum of V. V. Davydov. In *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87. Disponível em: http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/journal/v8_1/v81_60.aspx

Stacey, K., Chick, H.; Kendal, M. (Eds). (2004). *The future of the teaching and learning of algebra*: the 12th ICMI Study. New York, NY: Kluwer Academic Publishers.

Sousa, M.C. (2004). *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental*. (Tese). Universidade Estadual de Campinas.

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In A Coxford, & A. Shulte (Orgs). *As ideias da álgebra*. São Paulo, Brasil: Editora Atual.

Ursini, S., Escareno, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Vigotski, L.S. (2001). A *construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo, Brasil: Martins Fontes.

O uso da história da Trigonometría no ensino

Eline das Flores **Victer**
Universidade do Grande Rio
Brasil
elineflores@hotmail.com
Jurema Rosa **Lopes**
Universidade do Grande Rio
Brasil
juremarosa@ig.com.br
Carlos Antonio de **Souza**
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
carlosdesouzamatematica@hotmail.com

Resumo

A questão básica do presente estudo é: como o uso da História da Matemática no processo do ensino de trigonometria nas funções seno e cosseno, pode levar o aluno a ter uma aprendizagem significativa? O objetivo é investigar como a História da Trigonometria pode se constituir como elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno, por parte de estudantes do ensino médio. Essa experiência pedagógica envolveu a produção de um ensaio sobre a história da trigonometría e 21 alunos, do primeiro ano do ensino médio, de uma escola pública federal, localizada no município de Nilópolis/RJ. A conclusão do estudo evidencia, qualitativamente, que a História da Matemática é um elemento facilitador ao ensino das funções seno e cosseno na medida em que possibilita o diálogo, trazendo situações que possibilitam a problematização e compreensão dos conceitos.

Palavras chave: ensino, matemática, história da matemática, função seno e cosseno, aprendizagem significativa.

Introdução

Anos de experiência nos autorizam a dizer que muitas vezes o professor na sua prática em sala de aula não tem se mostrado um incentivador dos seus alunos. Sabemos que muitos alunos, pela própria natureza da disciplina matemática, têm dificuldade em entender os conteúdos e se apropriar dos conceitos. Nos parece que eles não conseguem articular o que aprendem, ao seu cotidiano. Também às perguntas feitas frequentemente pelos alunos com relação aos "por quês?", isto é, como surgiu isto, como surgiu aquilo, o que evidencia um conhecimento prévio, nem sempre se oferecem respostas, o que contribui, a nosso ver, para que os mesmos tenham pouca ou nenhuma motivação para a aprender matemática.

Pensamos que a pouca motivação aumenta a dificuldade dos alunos e já que ninguém gosta de colecionar insucessos, acreditamos que daí vem a aversão e o estigma da matemática como o "bicho papão" dos currículos escolares. Vale ressaltar, novamente, que em nossas

práticas docentes temos vivenciado, intensa e ciclicamente, situações marcadas pelo viés aversivo a esse importante campo de conhecimento. Assim, não poderíamos escapar ao estudo propositivo, na perspectiva de dirimir preocupações ou incômodos com os quais se insere nesse cenário.

A relevância da história da matemática

O objetivo do presente estudo é investigar como a História da Trigonometria pode se constituir como elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno, por parte de estudantes do ensino médio. Isso porque acreditamos que podemos usar a História da Matemática, que é um outro tipo de abordagem, com o objetivo de colocar o aluno em contato com a história da criação do conhecimento da matemática, pois este recurso, além de esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas, torna a aprendizagem mais significativa.

Entendemos que a História da Matemática pode ser um instrumento muito eficaz no processo de ensino-aprendizagem de matemática, uma vez que permite, aos alunos, entender conceitos a partir de sua origem, ao considerar todas as modificações ao longo da história. Assim, há possibilidades de despertar, a curiosidade dos alunos para pesquisas futuras e dessa forma, acreditamos que a compreensão do aluno seja facilitada.

O importante é que a História da Matemática ajude o aluno a perceber que a matemática não é uma ciência isolada dos demais saberes e, além do mais, o conhecimento da História da Matemática possibilita perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização.

Segundo Viana e Silva:

> A História da Matemática no ensino pode ser usada como uma ferramenta motivadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem significativa daquilo que se almeja. O maior ganho dessa forma de utilizar a História da Matemática na Educação Matemática é a possibilidade de discutir-se crença, emoções e afetos envolvidos na prática em que tal criação ocorreu (Viana e Silva, 2007, p.7).

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) os conceitos abordados vinculados com sua história tornam-se instrumentos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. Nesse sentido, a História da Matemática é um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

Uma outra maneira de participar da história apresentada na proposta dos PCN (Brasil, 1998), para o ensino da matemática, refere-se ao uso de problemas históricos, pois consideram que os conceitos matemáticos precisam ser tratados mediante a exploração de problemas, ou seja, situações nas quais os alunos necessitem desenvolver algum tipo de estratégias para resolvê-las.

Partindo da noção reafirmada por Malba Tahan (2010) de que "a matemática é um método geral de pensamento aplicável a todas as disciplinas e desempenha um papel dominante na ciência moderna" (p. 249), parece inconcebível pensar neste campo de saber sem se preocupar com a aprendizagem de seu conteúdo. Consideramos a História da Matemática como elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na fonte de busca, na compreensão e como elemento esclarecedor de conceitos matemáticos, possibilita o

levantamento e a discussão das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante.

Segundo D'Ambrosio:

> Uma percepção da História da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. (...) Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importancia (D'Ambrósio, 2006, p.29, apud Souza, 2009, p.8).

Souza (2008) destaca nos estudos de D'Ambrósio que a História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias ou práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas no contexto específico de sua época. A utilização da História da Matemática no ensino de matemática é um poder motivador que promove o despertar do interesse do aluno, podendo ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino aprendizagem da matemática atual. (D'Ambrósio, 2006, p.29, apud Souza, 2009, p.8)

Recorremos à história com finalidades diretamente relacionadas com as práticas em sala de aula. Uma das práticas é criar problemas que possam ser debatidos entre professor e aluno. Tais problemas não são os encontrados na História da Matemática, mas nos possibilitam debater alguns aspectos epistemológicos presentes na construção histórica do conhecimento trigonométrico e criar oportunidades de investigação para a Educação Matemática.

Mediante Silveira (2010), é ingênuo considerar a História da Matemática como um simples instrumento metodológico, pois ela é uma área de conhecimento matemático, isto é, um campo de investigação científica.

> Ao desenvolvermos estudos relativos às contribuições da História da Matemática para a Educação Matemática, percebemos que é necessário muita cautela, pois pode-se incorrer no erro de simplesmente assumir a História da Matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma investigação entre o conteúdo e sua atividade educacional. Essa interligação se fortalece a partir do momento que o professor de matemática tem o domínio da história do conteúdo que ele trabalha em sala de aula (Baroni e Nobre, 1999, p.132, apud Silveira, 2010).

A principal função da História da Matemática, em sala de aula, é identificada pelo auxílio, dado por esta, no desenvolvimento cognitivo dos alunos por meio de resolução de problemas, a partir de definições próprias dos conceitos, ligando a causalidade dos fatos à criação de novas definições. Ao professor cabe conhecer a história dos conceitos que norteiam os conteúdos a serem ensinados, enfrentando as dificuldades, buscando, assim, transformar as informações históricas em atividades de ensino, tornando, dessa forma, o ensino mais significativo.

Metodologia

A questão norteadora do presente estudo foi: como o conhecimento da história da matemática, especificamente trigonometria, pode levar o aluno a ter uma aprendizagem significativa das funções seno e cosseno? Objetivamos investigar como a História da Trigonometria pode constituir instrumento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno. Para tal,reconstituímos a história da trigonometria e seus conceitos fundamentais em um material didático, com informações históricas registradas nas obras de Eves (2004), Boyer (2010) e Kennedy (1992), enfatizando as funções seno e cosseno. Neste trabalho chamaremos essa

reconstrução histórica e seus conceitos, de ensaio. O ensaio foi objeto de estudo individual, paralelo, no contraturno das aulas, no espaço da residência de cada estudante.

O campo empírico do estudo foi o Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), município de Nilópolis/RJ. Vinte e um alunos do primeiro ano do ensino médio formam o universo da pesquisa. Na primeira fase do estudo, aplicamos um pré-teste para levantar os conhecimentos anteriores do aluno a respeito de semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo, pré requisitos para a aprendizagem das funções seno e cosseno. A segunda fase trata da leitura do ensaio e das aulas sobre trigonometria. Na terceira fase, aplicamos um pós-teste com o intuito de se obter dados comparativos (pré e pós-teste) a partir dos quais se possa dizer se o ensaio foi de fato um instrumento capaz de ajudar de modo significativo no rendimento estudantil. E por último, cada estudante escreveu uma redação evidenciando a sua compreensão sobre como os conteúdos abordando como a História da Trigonometria ajudou na compreensão e aprendizagem das funções seno e cosseno. A última fase do estudo, ou seja, a compreensão do alunos através da sua redação é o foco que trazemos no presente trabalho.

Uma discussão sobre a História da Trigonometria: a compreensão dos alunos

Na presente pesquisa utilizamos o uso da História da Trigonometria e trazemos para reflexão a compreensão dos alunos, sobre como a História da Trigonometria o ajuda na compreensão e aprendizagem das funções seno e cosseno. Assim, diante da pergunta: "*Você considera importante conhecer a história da matemática, paralelamente ao estudo de trigonometria, para facilitar a aprendizagem dos conteúdos de trigonometria? Por que?*", obtivemos os seguintes resultados:

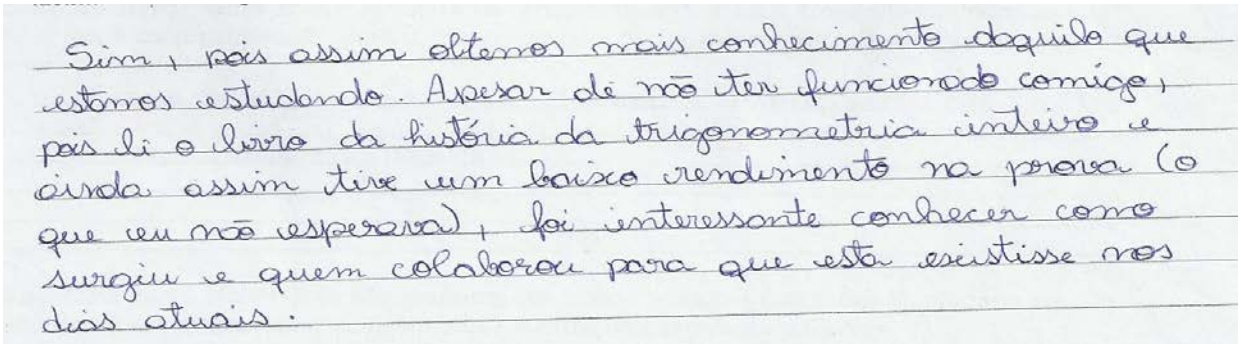

Sim, pois assim obtemos mais conhecimento daquilo que estamos estudando. Apesar de não ter funcionado comigo, pois li o livro da história da trigonometria inteiro e ainda assim tive um baixo rendimento na prova (o que eu não esperava), foi interessante conhecer como surgiu e quem colaborou para que esta existisse nos dias atuais.

Figura 1. Resposta do aluno A.

Apesar deste aluno acreditar que não houve uma aprendizagem , pois, segundo ele, "apesar de não ter funcionado comigo, pois li o livro da História da Trigonometria inteiro e, ainda assim, tive um baixo rendimento na prova", nos parece, no comentário seguinte que ele reconhece a apreensão de um conteúdo ligado à História da Matemática, pois achou "interessante conhecer como surgiu e quem colaborou para que esta existisse nos dias atuais", o que se pode evidenciar no que Baroni, Teixeira e Nobre (2005) dizem: por meio da História da Matemática pode-se verificar que a matemática é uma construção humana, que foi sendo desenvolvida ao longo do tempo e, por assim ser, permite compreender a origem das ideias que deram forma à cultura, como também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que criaram essas ideias e as circunstâncias em que se desenvolveram.

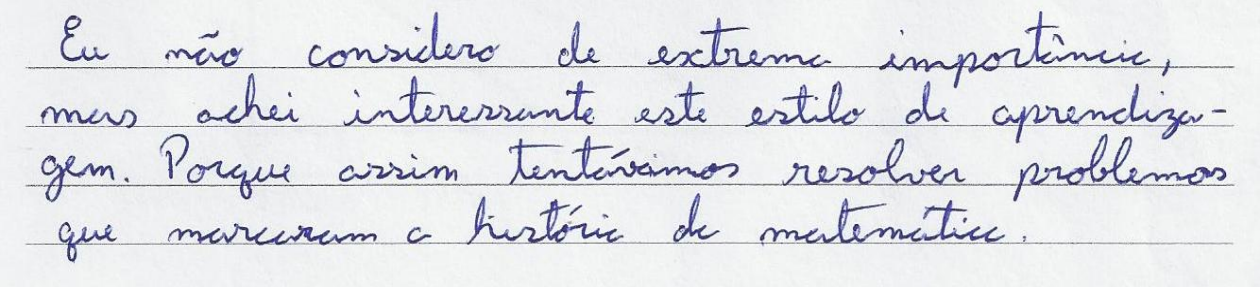


Figura 2. Resposta do aluno B.

A resposta deste aluno parece indicar um caso de ponderação: embora considere não ser de extrema importância, achou interessante a associação do estudo da história com estudo da trigonometria, justificando que essa dinâmica os instigava a fazer a associação entre os acontecimentos que levaram à produção daquele conhecimento trigonométrico e a retomada concreta de situações similares em que ele se envolve resolvendo problemas correlatos. Talvez precisasse de maior apoio ou a diversificação de outras estratégias de ensino-aprendizagem. A resposta do aluno suscita a fala de Sad (2004) ao destacar que a História da Matemática aumenta a motivação para a aprendizagem e situa a matemática cronologicamente, em relação a sua própria constituição, para poder compreender as condições de sua produção.

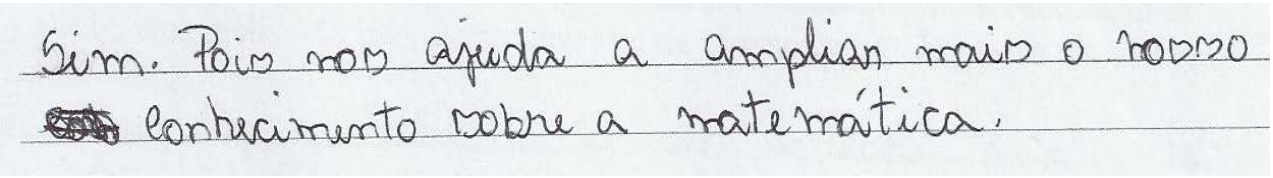


Figura 3. Resposta do aluno H.

Pela resposta desse aluno, podemos observar que houve uma aprendizagem, pois ele apresentou uma predisposição para conhecer a História da Matemática, quando diz "pois nos ajuda a ampliar mais o nosso conhecimento sobre a matemática". O aluno manifesta uma disposição para relacionar, de maneira não-arbitrária e não-literal, a sua estrutura cognitiva, os significados que capta dos materiais educativos, potencialmente significativos.

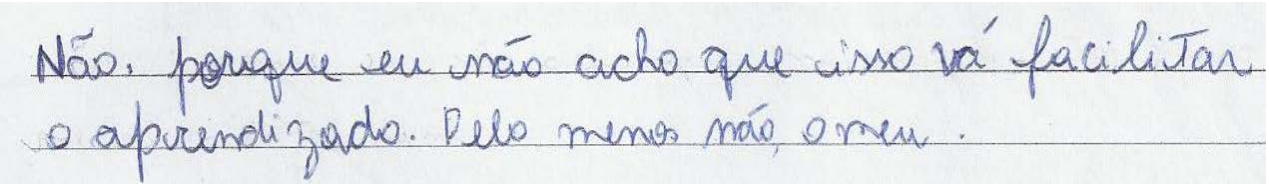


Figura 4. Resposta do aluno Q.

Ao que indica, pela fala do aluno Q, não existiu para ele, predisposição para conhecer a História da Matemática pois, para o mesmo, "isso não vai facilitar a aprendizagem". Não facilitar a aprendizagem, para esse aluno, nos sugere que a História da Matemática pode não ter tido importância para seu aprendizado; ainda que não tenhamos certeza se o aluno leu ou não o Ensaio. Mesmo com a adoção de uma estratégia de ensino diferente da tradicional, para ele, esta estratégia não facilitou sua aprendizagem. Este resultado nos leva a pensar em outros métodos para que haja uma aprendizagem, tais como seminários, pesquisas, além da participação ativa do aluno.

A história da matemática como facilitadora da memorização das fórmulas

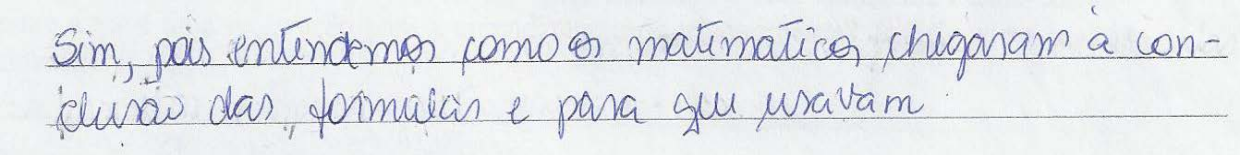


Figura 5. Resposta do aluno J.

É possível identificar a predisposição em conhecer a História da Matemática, interligado ao estudo da trigonometria, na resposta deste aluno, uma vez que para ele é importante entender "como os matemáticos chegaram à conclusão das fórmulas e para que usavam", que nos leva a concluir que o uso da História da Matemática tem, também, como objetivo colocar o aluno em contato com a história da criação do conhecimento da matemática, pois este recurso, além de esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas, facilita a aprendizagem . A História da Matemática no ensino pode ser usada como uma ferramenta facilitadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem daquilo que se almeja (Viana e Silva, 2007).

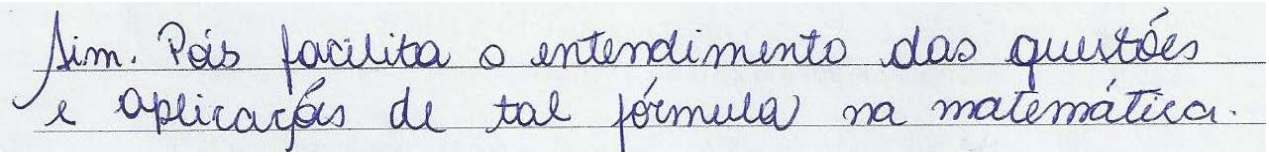


Figura 6. Resposta do aluno C.

A produção deste aluno nos mostra a relevancia da História da Matemática, uma vez que "facilita o entendimento das questões e aplicações de tal fórmula na matemática". Isto nos remete à enunciação de autores como Baroni, Teixeira e Nobre (2005) quando dizem que o estudo da História da Matemática favorece uma melhor compreensão sobre conceitos e teorias matemáticas, favorecendo a melhoria deste ensino e facilitando a contextualização histórica.

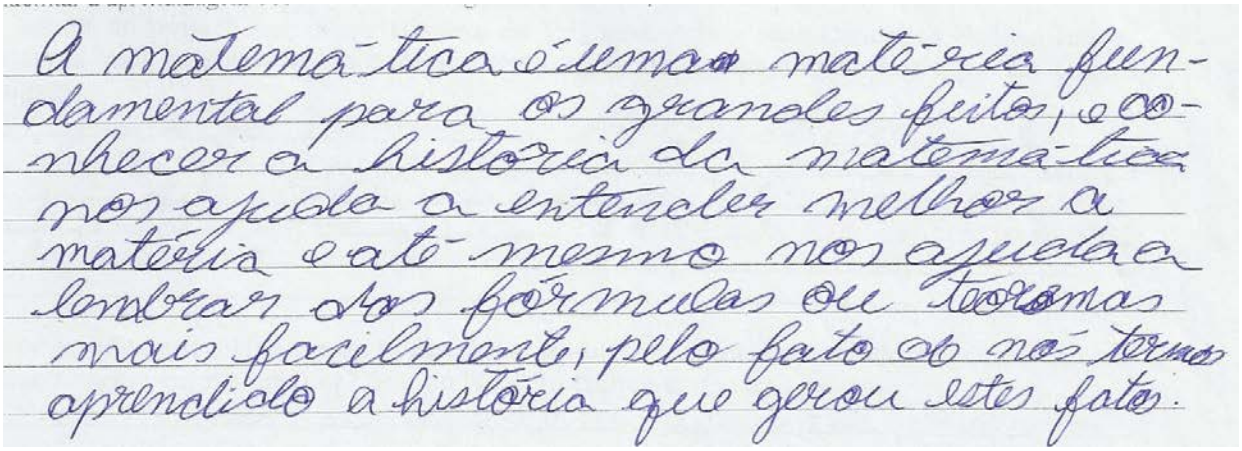


Figura 7. Resposta do aluno D.

Na resposta deste aluno, é possível identificar a predisposição para o conhecimento da História da Matemática; uma vez que ele atribui importância desse estudo paralelo para “entender melhor a matéria/disciplina e até mesmo nos ajuda a lembrar das fórmulas ou teoremas". Isso ratifica a enunciação de Baroni, Teixeira e Nobre (2005); Mendes (1997);

Sampaio (2008) e Sad (2004) de que o estudo da História da Matemática implica as seguintes contribuições: favorece o desenvolvimento de uma nova visão da matemática; a compreensão melhor sobre conceitos e teorias matemáticas; favorece a melhoria do ensino de matemática; facilita a contextualização histórica, a articulação teoria e prática, a adaptação das informações históricas às necessidades individuais com desenvolvimento de saberes e a produção de conhecimento na área de matemática; bem como disponibiliza um rol de atividades diferentes para além das infindáveis sequências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas.

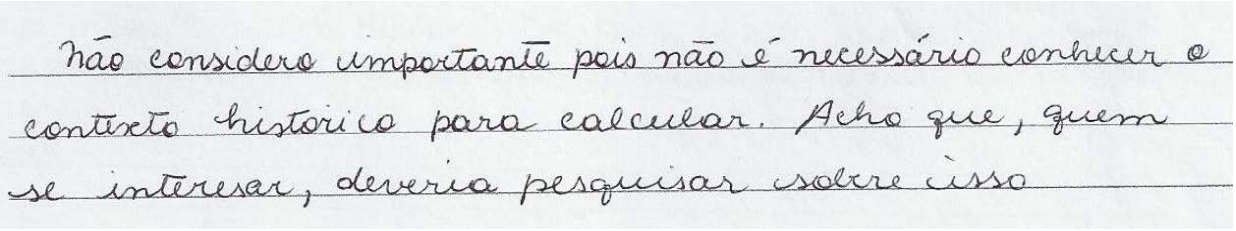

Não considero importante pois não é necessário conhecer o contexto histórico para calcular. Acho que, quem se interesar, deveria pesquisar sobre isso

Figura 8- Resposta do aluno T.

Aqui, o aluno não acredita que a História da Matemática possa facilitar o ensino de trigonometria, isso porque "não é necessário conhecer o conteúdo histórico para calcular", porém vale lembrar que insucessos acumulados podem se tornar obstáculos para novas aprendizagens.

O uso da história da matemática como facilitadora da aprendizagem

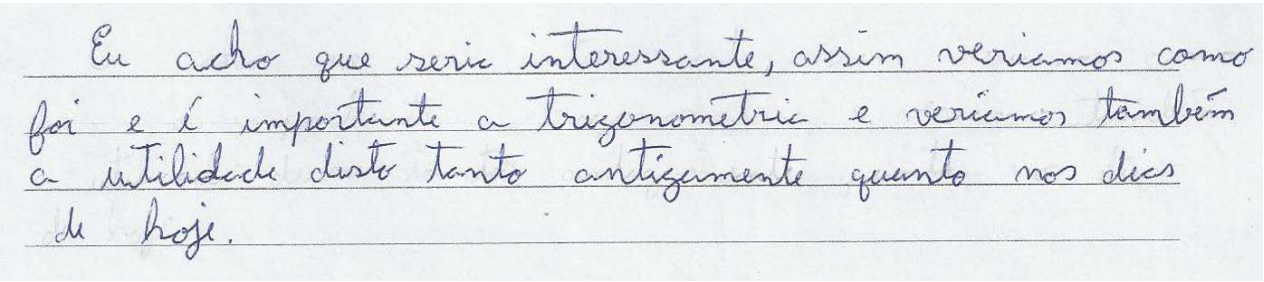

Eu acho que seria interessante, assim veríamos como foi e é importante a trigonometria e veríamos também a utilidade disto tanto antigamente quanto nos dias de hoje.

Figura 9. Resposta do aluno B.

Trata-se de manifestação que configura a expectativa de quem passará por uma experiência que fará uso da História da Matemática, apostando que isso facilitará a aprendizagem. Os valores assinalados pelo aluno são importantes e úteis, evidenciados com entusiasmo. Acreditamos que nesse estágio de desenvolvimento o estudante não se dá conta dos elos entre aprendizagens.

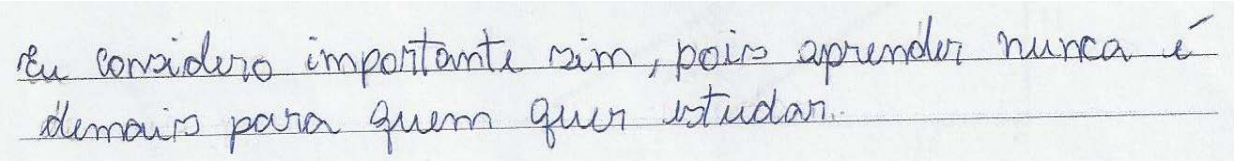

Eu considero importante sim, pois aprender nunca é demais para quem quer estudar.

Figura 10. Resposta do aluno H.

Trata-se de mais um caso de expectativa de contribuição da história para aprender trigonometria, pois o aluno considera importante, ratificando o valor da aprendizagem em si. Tal fala, mais uma vez ratifica o caso de alunos dispostos a aprender, ou seja , alunos que tentam relacionar o conteúdo ou material novo a sua estrutura de conhecimento.

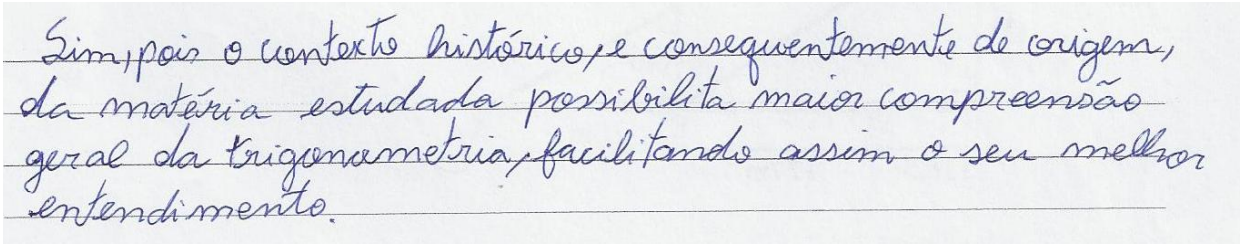


Figura 11. Resposta do aluno S.

Importante assinalar a referência deste aluno ao "contexto histórico" no qual o conhecimento produzido sirva, como base de sustentação necessária a uma outra aprendizagem ou "o seu melhor entendimento". Mesmo sem dispor de conhecimentos teóricos sobre aprendizagem, certamente, a vivência dessa experiência concreta já lhe fornece elementos para argumentar sobre a importância de aprender.

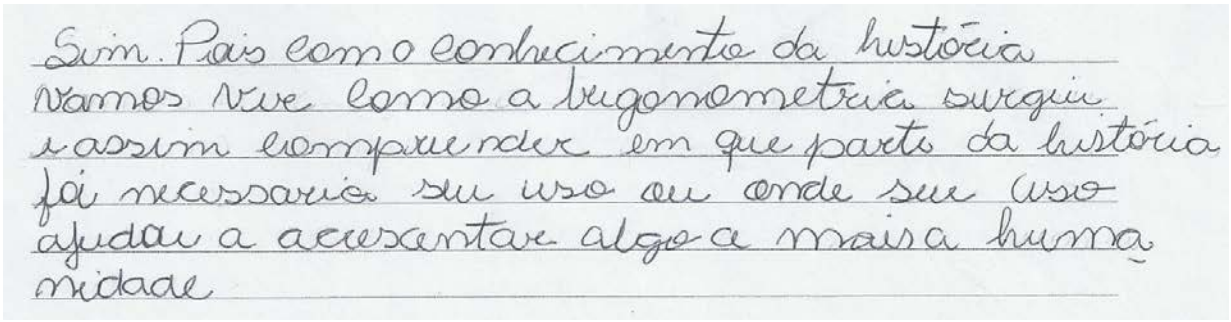


Figura 12. Resposta do aluno F.

> Com o conhecimento da história vamos ver como a trigonometria surgiu e assim compreender em que parte da história foi necessário seu uso ou onde seu uso ajudou a acrescentar algo mais a humanidade.

A resposta do aluno, ao que nos parece, confirma que a história lhe ajudou em termos de ganho de aprendizagem, ou seja ao que diz D'Ambrósio (2006) que uma percepção da História da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino, e não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento facilitador de grande importância. Posicionamento também defendido por Sad (2004) que afirma que o uso da história da matemática é importante porque aumenta a predisposição para aprender, além de situar a matemática cronologicamente em relação aos produtos e a sua própria constituição, para compreender as condições ou o contexto de sua produção.

Conclusões

A reconstrução histórica e conceitual sobre as funções seno e cosseno a partir do ensaio producido, revelou-nos novas questões a partir da compreensão dos alunos. Entre as questões destacamos que a mudança de estratégia nem sempre favorece ou facilita o ensino, isso porque alguns alunos expressaram que não houve relevância para o ensino da trigonometria (funções seno e cosseno); também o Ensaio, conforme os alunos, ajuda na compreensão do conteúdo na medida em que apontam que a História da Trigonometria facilita a memorização de fórmulas, nos parece que eles estão mais preocupados com a resolução das questões e distanciados dos conceitos fundamentais que envolvem as funções seno e cosseno; e, além disso, podemos destacar que o uso da História da Trigonometria, através do Ensaio, facilita a aprendizagem, na

medida em que possibilita o diálogo, trazendo situações que possibilitam a problematização e compreensão dos conceitos.

Referências

Baroni, R. L. S., & Nobre, S. A. (1999). A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In M. A. Bicudo (Org.), *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas* (pp. 129-136). São Paulo: UNESP.

Baroni, R. L. S., Teixeira, M. V., & Nobre, S. R. (2005). A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In M. A. Bicudo, & M.C. Borba (Orgs.), *Educação Matemática: pesquisa e movimiento* (pp. 164-185). São Paulo: Cortez.

D'ambrósio, U. (2006). *Educação matemática: da teoria à prática* (13ª ed., Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas: Papirus.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa* (36ª ed.). São Paulo: Ed. Paz e Terra.

Mendes, I. A. (1997). *Ensino de Trigonometria através de Atividades Históricas* (Dissertação de Mestrado em Educação). *165 f*. UFRN. Rio Grande do Norte.

Moreira, M. A. (2011). *Teorias de Aprendizagem* (2ªed.). São Paulo: Ed. EPU.

Moreira, M. A. (2010). Conferência Proferida no III Encontro Internacional Sobre Aprendizagem Significativa. (Lisboa, 11 a 15 de setembro de 2000).

Sad, L. A. (2004). Educação Matemática: Unidade na História e nos Objetivos Educacionais. In *Anais do VII EPEM* (pp. 1-5). SP, junho de 2004.

Sampaio, H.R. (2008). *Uma abordagem Histórica-Filosófica na Educação Matemática**:** contribuição ao processo de aprendizagem de trigonometria no ensino médio* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Brasil.

Souza, J. F. (2009). *Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática* (Dissertação de Mestrado). UFRRJ, Brasil.

Souza, C.A., Victer, E.F., & Lopes, J.R. (2011). *Uma breve história da trigonometria e seus conceitos fundamentais*. Mesquita. Rio de Janeiro: Ed. Entorno.

Tahan, M. (2010). *O Homem Que Calculava* (79ª ed.). Rio de Janeiro: Ed. Record.

Viana, M. C. V., & Silva, C. M. (2007). Concepções de Professores de Matemática sobre a Utilização da História da Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem. In *Encontro Nacional De História Da Matemática* (pp. 7). Belo Horizonte. B. H.

Reconstrucción del significado holístico de la antiderivada

Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Luis R. **Pino-Fan**
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. Para ello se realiza un estudio histórico-epistemológico, de tipo documental, a través del cuál se identifican diversas prácticas que abordaron los matemáticos de la época y que dieron paso al surgimiento y evolución de la noción antiderivada. Como resultado, se identificó, a partir del análisis de dichas prácticas con las herramientas teórico-metodológicas que nos proporciona el marco teórico denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS), que a lo largo de la historia la antiderivada ha adoptado cuatro significados parciales que en conjunto, conforman el significado holístico de dicha noción.

Palabras clave: antiderivada, estudio histórico-epistemológico, enfoque ontosemiótico, significado holístico, configuración epistémica.

Introducción

El estudio histórico-epistemológico de los objetos matemáticos, según Anacona (2003), aporta elementos que refieren a sus distintas concepciones, en estos estudios se analizan las posibles dificultades que se presentaron en la construcción de éstos. Coincidiendo con Doorman y Van Maannen (2008), en el hecho de que este tipo de estudios es importante puesto que permite dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. De acuerdo con D'Ambrosio (2013), la comprensión de los objetos matemáticos depende de cómo se originan y de sus causas o razones que propiciaron su desarrollo. La antiderivada como objeto matemático, ejerce un rol de mediador entre el cálculo diferencial y cálculo integral. Cada uno de estos dominios con las nociones que los conforman, entre ellas la derivada y la integral. Estas dos nociones han sido objeto de estudios históricos epistemológicos de forma independiente; para la derivada, Mateus (2011), Cantoral (2000), y Pino-Fan, Godino, y Font (2011); para la integral, Cordero (2002), Cabañas-Sánchez (2011), y Crisóstomo (2012).

En este trabajo presentamos el resultado de un estudio histórico-epistemológico de tipo documental, que se realizó con el fin de identificar las diversas etapas históricas de las cuales emerge la antiderivada. Describimos las características de las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos, los cuales contribuyeron al surgimiento y formalización de la antiderivada como objeto matemático. Para el análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas, utilizamos algunas de las herramientas que nos proporciona el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del

conocimiento y la instrucción matemática, concretamente utilizamos la noción de configuración epistémica, la cual nos permitió identificar y caracterizar cuatro significados parciales para la antiderivada. Dicha noción teórica se detalla en el siguiente apartado.

Marco teórico y metodología

Con la finalidad de realizar una reconstrucción del significado holístico para la antiderivada, realizamos un estudio de la historia del análisis matemático, en el cual tratamos de identificar problemáticas relevantes que dieron paso al surgimiento de la antiderivada y a su evolución.

Una vez identificadas estas situaciones problemas en las etapas históricas, el siguiente paso fue identificar el tipo de problemas que se abordaron en cada una de ellas, así como el tipo de tratamiento (o soluciones) que se plantearon. Para analizar tanto el tipo de situaciones-problemas como el tipo de soluciones que se plantearon a dichas situaciones-problema, hicimos uso de la noción de configuración epistémica (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Esta noción es proporcionada por el marco teórico conocido como enfoque ontosemiótico, y nos parece relevante su uso para los fines de nuestra investigación, dado que permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre antiderivadas, así como los significados de esta noción matemática, de acuerdo a cada etapa histórica.

Estudio histórico-epistemológico de la antiderivada

El estudio histórico-epistemológico, de tipo documental, tuvo por objetivo la identificación de las principales problemáticas que fueron abordadas en distintas etapas históricas y que dan origen a la emergencia del objeto matemático antiderivada. Como referente inicial, consideramos aquellas problemáticas en las que se contempla, explícita o implícitamente, la relación entre la derivada y la integral.

En este sentido, se ha dividido este estudio en tres grandes bloques: 1) la génesis de la antiderivada; 2) la antiderivada en la época medieval y el inicio de la edad moderna; y 3) en busca del rigor y la fundamentación matemática de la antiderivada.

La génesis de la antiderivada

Los matemáticos griegos se destacaron en sus procedimientos geométricos intuitivos, en especial, se dedicaron a encontrar tangentes y cuadraturas de diferentes superficies. Sus trabajos son la base de la génesis de la antiderivada, por esto es importante señalar a uno de ellos en particular, quien trabajó con las dos nociones matemáticas que vinculan a dicho objeto. Fue Arquímedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.), quien en sus trabajos utiliza la noción de recta tangente y sus propiedades, para el trazado de polígonos circunscritos a circunferencias; noción propuesta años antes por Euclides de Alejandría (325 a.C-265 a.C.).

Con respecto a la cuadratura, fue Arquímedes quien a través de la descomposición de polígonos en triángulos, como se muestra en su obra *Cuadratura de la Parábola*, demuestra geométricamente que un segmento de parábola puede agotarse[1] mediante una serie de triángulos

[1] Procedimiento geométrico de aproximación en el cual se inscriben triángulos en una curva. Este procedimiento también es conocido como método de exhausción.

decrecientes de área no constante. Este procedimiento lo llevó a demostrar el área del segmento parabólico.

En esta etapa histórica aparecen las tangentes –'proto derivadas' (Pino-Fan, 2014)– y las cuadraturas (integrales), como dos objetos matemáticos emergentes de prácticas geométricas. No hay evidencia que indique, durante este período, el estudio de la relación entre dichos objetos. Hubo que esperar hasta el medioevo para ver nuevos aportes en cuanto a esta relación.

La antiderivada en la Edad Media y el inicio de la Edad Moderna

Los antecedentes planteados por los griegos, y en especial por Arquímedes, influyeron en los matemáticos de la época medieval y del inicio de la edad moderna, entre ellos Isaac Barrow (1630-1677), quien en su obra *Lecciones de Óptica y Geometría*, destaca la relación geométrica entre las tangentes y las cuadraturas (Figura 1).

Este resultado geométrico es asumido en la actualidad como la versión preliminar del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). En esta etapa histórica, el objeto matemático antiderivada emerge con procedimientos geométricos que relacionan la tangente de una curva con su cuadratura. El argumento de dicha relación (las tangentes con sus cuadraturas) se basa en construcciones geométricas planteadas por los griegos, las cuales se detallan en el apartado 4.1. Barrow, durante este período, avanza al establecer la relación geométrica entre la tangente de una curva y su cuadratura, relación que hasta el momento, ningún estudio ha mostrado que existiese con anterioridad. Este gran avance de Barrow, hizo detonar en los matemáticos de la época, y en algunos de sus discípulos, una serie de aportes no geométricos en relación con la derivada, la integral, y la relación entre ambas nociones. Estos aportes se describen en los apartados 4.2 y 4.3.

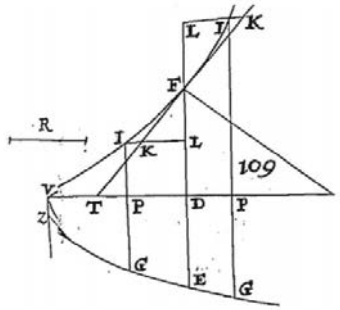


Figura 1. Relación entre tangentes y cuadraturas (Barrow, 1735, p. 167).

En el siglo XVII, Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), tomaron las bases teóricas matemáticas heredadas de Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, y Roberval, quienes aportaron a la germinación de una pre-antiderivada. En especial, Newton y Leibniz toman los aportes de Barrow, como se mostró anteriormente, y cada uno de forma independiente, y de acuerdo con Pino-Fan (2014), 'fundaron' lo que hoy denominamos *cálculo infinitesimal*. Según Collete (1985), los predecesores de Newton y Leibniz habían utilizado métodos de análisis para resolver problemas con curvas especificas, algunas de los cuales ya habían sido abordados por los matemáticos griegos.

Newton: el aporte cinemático

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva:

> Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones (Newton, 1736, p. 20).

Newton introduce inicialmente la noción de fluxiones de forma geométrica, en curvas cinemáticas que describen comportamientos en función del tiempo. Él describe el movimiento de un punto como la trayectoria de un móvil, en donde la velocidad en cada punto tiene componentes, según las direcciones de los ejes $\dot{x}, \dot{y}$. Para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva dada en un punto, calcula el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de direcciones de los ejes. Este cociente de diferenciación, para la época era sencillo de calcular, tanto que en los escritos de Newton, se escriben tablas que le posibilitan resultados directos para este cociente; la finalidad de estas tablas era la minimización de esfuerzos matemáticos en la búsqueda de identificar las propiedades de las curvas conocidas en su tiempo. Al mismo tiempo, Newton plantea el problema inverso, que descrito en términos actuales es: dado el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, cómo encontrar *y* en función de *x*.

Newton abordó el desarrollo del cálculo a partir de la geometría analítica, desarrollando un enfoque geométrico y analítico para lo que hoy conocemos como *derivadas,* las cuales aplica sobre curvas definidas a través de ecuaciones. Newton también buscaba cómo cuadrar distintas curvas, y la relación entre la cuadratura y la teoría de tangentes, convirtiéndose este en un problema fundamental para Newton (1736): dada una relación entre fluentes, encontrar la correspondiente relación entre sus fluxiones; y de forma recíproca, dada una relación entre fluxiones, hallar la correspondiente relación entre fluentes.

Newton introduce un nuevo lenguaje al referirse a las fluxiones y fluentes, en la concepción de dos problemas; el primero consistió en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema es planteado como el reciproco del primero. Esta relación, cinemática, entre las fluxiones y las fluentes, evidencian el surgimiento de lo que podría denominarse "proto-antiderivada", la cuál para Newton es originalmente una "integral indefinida".

Newton se percató de que el método de fluxiones podía utilizarse para obtener las velocidades instantáneas de una trayectoria conocida. En sus primeras investigaciones trabaja únicamente con problemas geométricos, como encontrar tangentes, curvaturas y áreas, utilizando como base matemática la geometría analítica de Descartes. No obstante, con el afán de separar su teoría de la de Descartes, probablemente por la limitación cartesiana, comenzó a trabajar únicamente con las ecuaciones y sus variables, sin necesidad de recurrir al sistema cartesiano. Por ejemplo, la aproximación del cálculo del área, es descrita como: el cociente $\frac{z(x+o)-z(x)}{o}$, se hace igual a la ordenada cuando *o* "se hace nada".

Newton también incluyó en su obra sobre fluxiones tablas de curvas clasificadas, que comprendían regiones limitadas por la abscisa y la ordenada para cada una de las formas curvas. Estas tablas corresponden en la actualidad a reglas de integración para el cálculo de áreas.

Leibniz: el aporte de análisis matemático

En el mismo período, de acuerdo con Collete (1985), Leibniz elabora un enfoque basado en el concepto de sumas y diferencias finitas (caso discreto), y cuando se aplica a curvas (caso continuo), pueden llegar a ser infinitamente pequeñas. Su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su "*cálculo de las diferencias*" (Pino-Fan, 2014, p. 96). Sus ideas permiten interpretar el paso de lo intuitivo a lo formal, con una construcción simbólica, lo que representa un gran avance al desarrollo del calculo infinitesimal. Leibniz, al igual que Newton, utilizó un nuevo lenguaje notacional, tal como se evidencia en su trabajo con el símbolo $\int l$ (suma de todas las *l*), para generar la sustitución de la notación usada por Cavalieri para la misma suma, "$Omn \cdot l$" (suma de todas las *l*).

Los *argumentos* propuestos por Leibniz, descritos por Boyer (1959), muestran el manejo de *propiedades* para determinar el área bajo una curva, la vinculación de limites de sumas en funciones continuas con la *integral definida*, llevó a Leibniz a descubrir lo que hoy se conoce como el teorema fundamental del cálculo, parte 2; como se muestra a continuación:

"Si, $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, *para una función continua f(x), tiene una derivada que es la misma, F´(x)=f(x). En general, es posible encontrar valores para* $x = a$, $x = b$, *de un intervalo [a,b] donde la función F(x) puede ser derivada de f(x). La función F(x), llamada primitiva de f(x), y los valores* $F(b) - F(a)$, *son ocasionados por la definición de* $\int_a^b f(x)dx$, *en el caso que la relación* $\int_a^x f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ *es el teorema fundamental del cálculo, que define la integral definida*" (Boyer, 1959, p. 11).

Esta descripción contemporánea de Leibniz descrita por Boyer (1959), relaciona el objeto derivada y la integral definida, a través de una función llamada primitiva o antiderivada.

En términos comparativos, de los trabajos y desarrollos de los fundadores del cálculo, se podría decir que el trabajo de Newton se basa en variaciones respecto al tiempo, pues el origen de sus ideas, tal como lo hemos comentado, es físico. Leibniz, por el contrario, parte estudiando la geometría de los infinitesimales, de ahí que su trabajo se basara en sumas de infinitesimales, sumas que son asumidas como integrales definidas para las cuáles, requiere el uso de funciones primitivas (antiderivadas) para el cálculo respectivo de áreas.

En busca del rigor y la fundamentación matemática de la antiderivada

En 1742, Jean Bernoulli (1667-1748) publicó en la *Opera Omnia* el primer texto expositivo de cálculo integral, considerado satisfactorio por la *Royal Society of London*. En dicha obra, considera la integral como la operación inversa de la diferencial con la adición adecuada de una constante, concepción distinta a la de Leibniz quien consideraba la integral como una suma de cantidades infinitamente pequeñas. Fue Leonhard Euler (1707-1783), en su obra *Fundamentos de cálculo integral*, quien llevó a la noción matemática antiderivada a su desarrollo actual.

Euler es quien plantea una solución para algunos problemas cinemáticos y geométricos, sin necesidad de encontrar una función primitiva (antiderivada). En cambio propuso que es posible determinar una función desconocida a partir de una relación que la vincule con su derivada. Del mismo modo, Euler consideró la incapacidad de los métodos elementales propuestos por Leibniz y Newton para resolver problemas importantes, puesto que dichos métodos se restringían a

algunas funciones a las que denominó elementales[2]. Para dar solución a la suma infinita dichas funciones, introduce en su tratado un método numérico que permite solucionar cualquier situación.

Configuraciones epistémicas asociadas a problemáticas que involucran el uso de la antiderivada

El recorrido histórico-documental que realizamos, permitió identificar diversas problemáticas que dieron paso a la emergencia de la antiderivada como objeto matemático. Dichas problemáticas las hemos agrupado en cuatro grandes categorías:

a) El problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma.

b) El problema de la relación fluxiones–fluentes.

c) El problema sobre la relación de las sumatorias y los diferenciales.

d) El problema de la identificación de funciones elementales.

Cada una de estas categorías, refieren a sistemas de prácticas con características concretas y desarrollados en diversas etapas históricas. A continuación se analiza cada uno de los cuatro sistemas de prácticas, mediante el análisis de un ejemplo prototípico a través del cual se describen las características de la configuración epistémica asociada a cada sistema.

Configuración epistémica 1: El problema geométrico de las tangentes y cuadraturas

Este problema, descrito en la sección 3.2 (Figura 1), fue abordado por Barrow de forma geométrica, y es característico tanto de las situaciones/problemas abordados en la época, como de las prácticas matemáticas que hasta esa época se desarrollaban. Barrow logra unir dos *conceptos* separados hasta ese momento, la 'tangente a una curva' y la 'cuadratura' de la misma.

Las construcciones geométricas son un trabajo propio de los griegos y se utilizaron como único *argumento,* y *lenguaje,* hasta el siglo XVII. Todas las *propiedades* y *procedimientos* están apoyadas en construcciones geométricas heredadas de los griegos, los cuales no disponían de métodos generales para el trazado de rectas tangentes a cualquier curva, ni mucho menos relacionarla con la cuadratura de la misma. Tanto en el planteamiento como en las soluciones de las situaciones problemas, se utilizó un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentos* eran puramente sintéticos. En las soluciones propuestas, intervenían *conceptos* tales como curva continua creciente, perpendicularidad, puntos, rectángulo, longitud, paralelismo. Así mismo, en la lección X planteada por Barrow, aparecen *propiedades* utilizadas siglos atrás por los griegos, como la perpendicularidad entre curvas, rectas que unen intersecciones opuestas al trazo de tangentes en figuras cónicas, entre otras. Con respecto a los *procedimientos,* son los característicos de los matemáticos de la época: geométricos.

El problema resuelto por Barrow, que fue iniciado por los griegos y trabajado por otros matemáticos de la época, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "*Tangentes-Cuadraturas*", el cual reúne los usos matemáticos geométricos que en dicha etapa

[2] Una función denominada elemental es una función construida a partir de una cantidad finita de funciones fundamentales y constantes mediante operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) y/o la composición de funciones (Nikolski, 1985, pg.16).

histórica se desarrollaban y que conferían un significado parcial, de tipo geométrico, a la antiderivada.

Configuración epistémica 2: El problema de la relación fluxiones-fluentes

Este problema, descrito en el apartado 3.3.1, es parte de un sistema de prácticas, que se ha denominado *Fluxiones-Fluentes*. Para describir los elementos de esta segunda configuración (CE2), consideramos dos problemas prototípicos propuestos por Newton (1736):

I. Dada la longitud del espacio descrito continuamente (es decir, en todo momento), encontrar la velocidad del movimiento en cualquier momento propuesto.

II. Dada la velocidad del movimiento continuamente, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier momento propuesto (p. 19).

Estos problemas, y su solución, están basados en la concepción cinemática del movimiento continuo y maneja dos *conceptos* centrales. El primero es el de *fluente,* entendido como cantidad de movimiento que varía respecto del tiempo. El segundo es el de *fluxión*, que es la velocidad de cambio del movimiento respecto del tiempo.

El primer problema se aborda desde el ejemplo propuesto por Newton (1736): *"Dada la curva de ecuación* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$*, calcular las fluxiones"* (p. 21).

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Newton introduce nuevos *conceptos/definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones de términos y notación (además de *lenguaje* algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar los siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) *"o"* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño; b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x*, que representa con ox (análogamente define el momento de *y,* oy); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto $v, x, y, z,$ para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones"; y e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *"o"*, es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* de esta configuración. Para abordar el segundo problema Newton sugiere: "Sea la ecuación propuesta por $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, calcular las fluentes" (Newton, 1736, p. 26).

Sus escritos muestran la solución a este problema, indicando que se debe proceder de manera contraria a la sustitución del primer problema planteado.

En este último ejemplo propuesto por Newton, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como *argumenta* los procedimientos (y en general sus *definiciones* y *proposiciones*) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones/propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario entonces la curva está dada por la

expresión $y = max^{m-1}$ (derivación); y b) dada una $y = max^{m-1}$ entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (integración).

En cuanto a los tipos de *situaciones/problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa.

Vemos como en esta configuración las fluxiones o velocidades de los movimientos de las fluentes –que en la actualidad conocemos como la derivada–, y las fluentes o cantidades que varían respecto al tiempo –que en la actualidad conocemos como antiderivación–, son entendidos por Newton como procedimientos recíprocos.

Configuración epistémica 3: El problema de la relación diferenciales-sumatorias

Este problema, descrito en el apartado 3.3.2, planteado por Leibniz, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "Sumatoria-Diferencial". Este sistema de prácticas lo analizamos a partir de dos problemas prototípicos. El primero está basado en la construcción del cálculo diferencial a partir de las diferencias infinitesimales, mientras que el segundo se basa en la construcción del cálculo sumatorio (cálculo integral) a partir de la suma de diferencias infinitamente pequeñas.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Leibniz utiliza un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pueden escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, logró introducir un nuevo *lenguaje* accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los *conceptos*, *procedimientos* y *argumentos*, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y d, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de *x* o *y*. Aunque también, denota con *dx* y *dy* a las diferenciales de las variables *x* e *y* respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de *x* e *y*.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos/definiciones* o *procedimientos,* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce el símbolo $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas de rectángulos, y d para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, así como la regla de integración por partes, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

Así mismo, afirmaba que el proceso de integración, referido como proceso de sumación es inverso al proceso de diferenciación. Pronto se interesaría en la relación que existe entre *dx* y *dy*, y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito de 1676, titulado *Método inverso de tangentes*, Leibniz afirmaba que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

Configuración epistémica 4: El problema de la identificación de funciones elementales

Este problema, abordado anteriormente en el apartado 3.4, corresponde a uno de los sistemas de prácticas que identificamos y que lleva vinculada la configuración epistémica cuatro (CE 4) que se ha denominado "funciones elementales". A continuación se describen los elementos de esta configuración mediante un problema prototípico propuesto por Euler y construido sobre los problemas y soluciones de Leibniz. Euler determinó la adición de una constante de integración al encontrar las función primitiva (antiderivada) y que en la actualidad conocemos como la constante de integración en la solución de una integral indefinida, que representa una familia de funciones de una función que ha sido derivada; de esta forma Euler distingue entre la integral particular (integral definida) y la integral completa (integral indefinida).

Euler utiliza un *lenguaje* nuevo en las matemáticas al adicionar una constante arbitraria para expresar la solución de la integral completa, que hoy se conoce como la adición de la constante de integración para representar una función que reúne la familia de funciones de una función al ser derivada. Sus *argumentos* para diferenciar la integral completa de la integral particular, llevan a lo que hoy conocemos como la antiderivada. Los aportes de Euler (1770), determinan con *definiciones* el hecho de que no todas las funciones tengan antiderivada o primitiva, pero sí puedan integrase a través de series trabajadas por Leibniz. Él lo describe como sigue:

> Definición 5. Si las funciones, que se buscan en el cálculo integral de una relación de los diferenciales, no se pueden mostrar en forma algebraica, entonces estas son llamadas trascendentes, ya que varias de ellas trascienden las competencias de análisis común (p. 5).

Euler, con la anterior definición advierte la forma en que debe ser abordada la antiderivada de una función. Euler prosigue su descripción sobre la forma de cómo abordar las funciones que no son elementales:

> Ahora, en el primer intento de resolver una integral, las funciones no deben buscarse inicialmente, primero debe tomarse como una función trascendental. A menudo sucede que una integral algebraica puede ser obtenida a través de operaciones hábiles. Si la función que se busca es trascendental, se debe considerar con cuidado si ésta puede ser reducida a funciones más simples, o expresada como una función logarítmica o de forma angular, en cuyo caso la solución algebraica puede ser comparada igualmente. Pero si esto no se logra, conviene investigar la forma más sencilla de las funciones trascendentales, hasta que se pueda reducir el integrando tratado, con el método más adecuado, con el fin que los valores más cercanos a las funciones a trascender se puedan producir.
>
> Teorema. Todas las funciones que se encuentran a través del cálculo de una integral son indeterminadas, se requiere una determinación por la naturaleza de la cuestión, que suministren la solución (p. 10).

Con el teorema anterior, Euler indica la forma de abordar funciones a través del cálculo integral, indicando qué hacer cuando estas no pueden ser expresadas en forma elemental. Esta indicación hace que encontremos la solución por métodos diferentes a los elementales (numéricos) haciendo que la función pueda ser integrable sin tener antiderivada; esto ocurre cuando hace referencia, en el teorema, a encontrar la solución de ellas (las integrales) "...por la naturaleza en cuestión que suministre la solución", haciendo alusión al uso de métodos numéricos para la solución.

Pero la importancia del aporte de Euler está en la distinción que hace entre las nociones de integral completa –lo que conocemos hoy en día como integral indefinida o antiderivada–, y de integral, haciendo referencia a integrales definidas. Estas integrales definidas se pueden calcular, siempre y cuando se cumplan las condiciones de continuidad y de función elemental, a través de la aplicación de lo que hoy conocemos como Teorema Fundamental del Cálculo.

Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que se abordaron y desarrollaron en la diversas etapas históricas, han resultado en una propuesta de reconstrucción del significado global (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) de la antiderivada. Cada sistema de práctica tiene vinculada una configuración epistémica que esta compuesta de objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos). La herramienta que nos proporciona el EOS, conocida como configuración epistémica nos ha ayudado a identificar y describir estos elementos.

Cada una de estas configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial para la antiderivada. En nuestro caso concreto son cuatro: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE3); 4) *Funciones Elementales* (CE4).

El esquema de la Figura 2, muestra los *significados parciales* identificados, cada uno de ellos asociado a su respectiva configuración epistémica. Al igual muestra la relación entre algunas configuraciones de acuerdo a su generalización, así como la ubicación de la configuración en una línea de tiempo de acuerdo con su desarrollo.

Si bien cada configuración es única, el esquema de la Figura 2, muestra algunas conexiones entre configuraciones, estas conexiones descritas por una línea roja discontinua, que indican que con los elementos de dicha configuración es plausible resolver algunos situaciones-problemas de otra configuración.

En el caso particular de la cuarta configuración (CE4), es intensiva por sus conexiones a otros sistemas de practicas indistintamente del tiempo histórico en que se encuentren, dado que con los elementos de (CE4) se pueden resolver algún tipo de problemas de los sistemas de prácticas que llevan asociadas las configuraciones CE1, CE2 y CE3, respectivamente.

Por otra parte, el esquema de la Figura 2, muestra la evolución, respecto de los elementos y características, de las configuraciones epistémicas y, por ende, de los diversos significados de la antiderivada a través del tiempo. Lo anterior se indica con conexiones con líneas continuas de color azul. Esta evolución esta dada en el sentido de que una nueva configuración, toma elementos de una configuración establecida, dando paso a la nueva configuración. En nuestro caso son las configuraciones CE2 y CE3, las que toman elementos establecidos en la primera configuración (CE1), para activar nuevos elementos en dichas nuevas configuraciones, indistintamente de que estas configuraciones estén establecidas en la misma etapa histórica. De la misma forma actúa la configuración (CE4), al tomar elementos de la configuración (CE3).

La consideración conjunta de situaciones problema asociadas a sus respectivas configuraciones epistémicas y sus relaciones de evolución y/o solución de problemas, ilustrados en el esquema en la Figura 2, es lo que conforma nuestra propuesta de reconstrucción del *significado holístico de la antiderivada*.

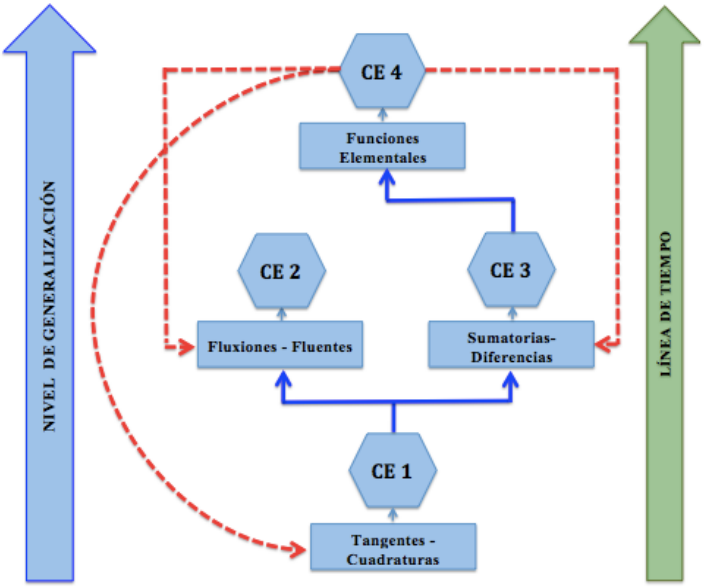


Figura 2. Significado Holístico de la Antiderivada.

Consideraciones finales

La propuesta de reconstrucción del significado holístico de los objetos matemáticos, en general, resulta especialmente importante porque a través de ellos se identifican significados parciales de un objeto en la historia. El análisis de problemáticas por medio de la herramientas del EOS, en particular de la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), permite describir de forma sistemática situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos, involucrados en las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos y que dieron paso al surgimiento y evolución de la antiderivada.

El estudio resultó en la identificación de cuatro configuraciones epistémicas que denominamos: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3); 4) *Funciones Elementales* (CE 4). Cada una de estas cuatro configuraciones epistémicas, a su vez, llevan asociado un significado parcial distinto para la antiderivada. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011), y a los resultados de este estudio, la herramienta *configuración epistémica* se prevé como una herramienta teórico-metodológica que permite determinar significados parciales para los objetos matemáticos.

El tipo de estudio histórico como el desarrollado en este trabajo es especialmente importante, coincidiendo con Doorman y Van Maannen (2008), por que permite dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. De esta manera, es indudable que esta propuesta es pieza clave para la comprensión del origen y evolución de la noción matemática antiderivada, puesto que nos proporciona conocimientos que podrían contemplarse en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de dicha noción.

Referencias

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *EMA*, *8*(1), 30-46.

Barrow, I. (1735). *Geometrical Lectures* (Translated from the Latin Edition by Edmund Stone). London: Cambridge University.

Boyer, C. (1959). The history the calculus and its conceptual developtmen. New York: Dover Publications, Inc.

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (Tesis Doctoral). CINVESTAV- IPN, Mexico.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Collete, J. (1985). *Historia de las matemáticas II.* México: Siglo XXI.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Crisostomo, E. (2012). *Idoneidad de Procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didactica del cálculo y el conocimiento profesional* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

D'Ambrosio, U. (2013). Priorizar história e filosofia da matemática. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8*(11),175-186.

Doorman, M., & Van Maannen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 4-14

Euler, L. (1770). *Intitutionum Calculi Integralis* (Vol. 1) (Translated from the Author's Latin Original). St. Petersburg.

Leibniz, W.G. (1920). *The early mathematical manuscripts of Leibniz*. New York: Dover Publications, Inc.

Mateus, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 3-21.

Newton, I. (1686). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Translated from the Author's Latin Original). London.

Newton, I. (1736). *The method of fluxions and infinite series* (Translated from the Author's Latin Original by John Colson). London.

Nikolski, S. (1985). *Elementos de Análisis Matemático*. Editorial Mir, Moscú.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistemica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Um referencial teórico para investigar as concepções de alunos de graduação em Matemática sobre demonstrações

Inocêncio **Fernandes** Balieiro Filho
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo estabelecer um referencial teórico que possibilite entender o raciocínio matemático, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos para construí-la, tomando por base, inicialmente, as pesquisas de Nickerson (2010), que abordam esses três temas que se agrupam e se inter-relacionam. Além das indagações de Nickerson, para possibilitar uma melhor compreensão dos aspectos inerentes aos métodos de demonstração, optamos por uma orientação histórica, filosófica e matemática com o intuito de que possamos ter uma reflexão aprofundada sobre aquelas três questões ao respondermos algumas perguntas, numa perspectiva epistemológica e ontológica, presente no processo de demonstração. Com isso, buscaremos em uma segunda etapa desta pesquisa, elaborar um panorama conceitual que aborde as concepções sobre demonstração em Matemática considerando as várias correntes da Filosofia da Matemática para, por fim, investigar as concepções dos alunos de um curso de graduação em Matemática sobre demonstração.

Palavras chave: Demonstração; Filosofia da Matemática; História da Matemática; Fundamentos da Matemática.

Introdução

As primeiras experiências em formar um quadro ou esquema argumentativo, iniciam-se em nossa infância, quando tentamos persuadir ou convencer os nossos pais ou irmãos de algo que queremos conseguir. E, posteriormente, em vários estágios (primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, Médio e Superior) de nossa formação educacional, somos estimulados e orientados – pelas várias disciplinas das diferentes áreas – a argumentar de forma coerente diante de uma situação problema que envolve os conteúdos dessas disciplinas.

Esse processo argumentativo fica evidente na área de exatas, em especial, na disciplina de Matemática. De fato, as primeiras noções de argumentação matemática surgem quando aprendemos aritmética, geometria e álgebra elementar nos anos iniciais de nossa formação. E, em particular, no Ensino Médio, quando em alguns momentos, o professor demonstra alguns resultados relacionados ao conteúdo matemático ministrado nesse nível.

Em virtude dessa experiência, ficamos com a impressão que, em Matemática, os resultados (proposições) devem ser demonstrados para que tenhamos a certeza de sua validade. Já em outros ramos do conhecimento, essa verdade tem certa subjetividade que, algumas vezes,

depende de um contexto ou experiência, mas que pode ser contestada numa outra situação ou por meio de um novo experimento.

Ainda assim, podemos considerar que esses "momentos" de contato com procedimentos e métodos em demonstração são raros durante nossa formação. E mesmo alguns dos alunos que ingressam na universidade para cursar uma Licenciatura em Matemática, durante sua formação profissional, não têm disciplinas (por exemplo, Introdução à Lógica, que também buscasse discutir os métodos e procedimentos utilizados nas demonstrações em Matemática e Filosofia da Matemática e que discutisse também os aspectos históricos e filosóficos presentes nesses métodos de demonstração) que contribuam para que tenham um conhecimento necessário de métodos de demonstração para um aprofundamento dos conteúdos que fazem parte das disciplinas (Elementos de Aritmética Elementar, Geometria Euclidiana, Álgebra e Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Análise Real, Teoria Elementar dos Números, etc.) que compõem um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Sobre questões epistemológicas e ontológicas no processo de demonstração

Para Nickerson (2010), se quisermos compreender o raciocínio matemático de uma forma global, temos de entender, pelo menos da perspectiva de nossa cultura e de nosso tempo, sobre o raciocínio matemático, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos em sua construção. Diante desses pressupostos, Nickerson estabelece e discute, não nesta ordem, algumas questões que respondidas poderão orientar e explicitar a primeira indagação e promover um conhecimento aprofundado sobre a segunda e a terceira inquirição. As questões são: *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração? O que constitui uma demonstração? O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração? Como as demonstrações são construídas? Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida? Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração?*

A primeira pergunta: *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração?*

Esta questão pode ser respondida de maneira lacônica, isto é, que sua origem e local de nascimento são obscuros, visto que há poucas evidências históricas para respondê-la. Porém, pode-se formular outra resposta, ao rememorar historicamente as conquistas matemáticas realizadas pelas antigas civilizações (egípcia, babilônica, chinesa e indiana) em distintos momentos históricos. Diante disso, pode-se conjecturar que a origem e a noção de demonstração surgiram com o desenvolvimento da Matemática dessas civilizações? Na verdade, Joseph salienta que, houve por parte de alguns historiadores:

> Um entusiasmo excessivo para tudo que é grego, decorrente da crença de que muito do que é desejável e digno de ser imitado na civilização Ocidental teve origem na Grécia antiga, levou a uma relutância em permitir que outras civilizações antigas participassem do patrimônio histórico das descobertas em Matemática. A crença em um "milagre grego" e a maneira de atribuir quaisquer descobertas significativas em Matemática por influências gregas fazem parte dessa síndrome. E subjacente a essa visão é a crença de que a Matemática egípcia, mesopotâmica e grega era proveniente de três diferentes tradições matemáticas. (Joseph, 2011, p. 177-178)

Uma justificativa plausível para a formação dessa crença e de uma ideologia que não permitisse que essas civilizações "participassem do patrimônio histórico das descobertas em Matemática" pode ser a dominação e subjugação de algumas nações europeias em território africano e asiático.

> A maioria das histórias de Matemática tiveram uma excessiva influência em obras posteriores que foram escritas no século XIX e início do século XX. Durante esse período, dois acontecimentos contrastantes ocorreram e tiveram um impacto sobre o conteúdo e o equilíbrio desses livros, especialmente, produzidos na Inglaterra e nos Estados Unidos. Excitantes descobertas de Matemática antiga em papiros no Egito e tabuletas de argila na Mesopotâmia empurram para trás as origens de registros matemáticos escritos por pelo menos 1.500 anos. Mas, uma influência muito mais forte e de compensação foi o culminar da dominação europeia na forma de controle político de vastas áreas da África e da Ásia. Externo a essa dominação surgiu à ideologia da superioridade europeia que era permeada por uma ampla gama de atividades sociais e econômicas, com vestígios que podem ser encontrados na História da Ciência, que enfatizaram o papel único da Europa no fornecimento do solo e espírito para a descoberta científica. As contribuições dos povos colonizados foram ignoradas ou desvalorizadas como parte da justificativa para a subjugação e dominação. E o desenvolvimento de Matemática anterior aos gregos – especialmente no Egito e na Mesopotâmia – sofreu um destino semelhante, rejeitado como de pouca importância para a história posterior do assunto. (Joseph, 2011, p. 4)

Sem dúvida, recentes e aprofundadas pesquisas sobre a Matemática cultivada por esses povos mostram um desenvolvimento considerável de procedimentos, métodos e fórmulas aproximadas e exatas no estudo da aritmética, geometria, álgebra e astronomia.

Assim, em especial, sobre a Matemática egípcia, Gillings, afirma:

> Os estudiosos da História e Filosofia da Ciência, do século XX, ao considerarem as contribuições dos antigos egípcios, inclinam-se para uma atitude moderna de que um argumento ou demonstração lógica deve ser *simbólica*, se é para ser visto como rigoroso, e que um ou dois exemplos específicos usando números selecionados não podem ser cientificamente consistentes. Mas, isso não é verdade! Um argumento não simbólico ou uma demonstração *pode* ser muito rigoroso, quando administrado para um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável deve ser *típico*, e que uma generalização adicional para *qualquer* valor deve ser *imediata*. Em qualquer um dos tópicos mencionados neste livro, em que o tratamento dos escribas segue tais linhas, ambos os requisitos estão preenchidos, de forma que os argumentos apresentados pelos escribas já estão *rigorosos*; as conclusões das demonstrações não são realmente necessárias, apenas confirmadas. O rigor está implícito no método.
>
> Nós temos de aceitar a circunstância de que os egípcios não pensaram e raciocinaram como fizeram os gregos. Se eles acharam algum método exato (pode ser que os tenham descoberto), eles não se perguntaram por que ele funcionava. Eles não procuraram estabelecer sua verdade universal por um argumento a priori simbólico, que mostraria evidente e logicamente seus processos de pensamento. O que eles fizeram foi definir e explicar em uma sequência ordenada os passos necessários para o procedimento adequado e, no final, eles adicionavam uma verificação ou prova de que as etapas descritas, na verdade, levavam a uma solução correta do problema. Esta foi a ciência como eles a conheciam, e não é adequado ou apropriado que no século XX comparemos criticamente os seus métodos com os dos gregos ou qualquer outra nação emergente posterior, que, por assim dizer, estava sobre os seus ombros. (Gillings, 1982, p. 233-234)

Para respondermos completamente àquela primeira pergunta, e considerando a configuração sistemática dedutiva que se apresenta nas demonstrações em Matemática, asseguramos que sua origem remonta à Grécia Antiga – em decorrência de aspectos sociais, políticos e culturais que foram concebidos democraticamente num ambiente que preconizava,

praticava e valorizava a forma de argumentação dialética em debates públicos. Conforme assevera Ernest:

> A demonstração matemática, certamente, na sua forma axiomática, parece ter-se desenvolvido na Grécia Clássica. Cornford, Kolmogorov, Restivo, Struik e outros argumentaram que o surgimento da demonstração em Matemática na Grécia Antiga refletia as circunstâncias sociais, políticas e culturais da época. Estas incluíram, especialmente, as formas democráticas de vida em que o argumento dialético e o debate foram valorizados e amplamente praticados, juntamente com o ceticismo e as especulações sobre hipóteses e ideias, e uma perspectiva idealista associada a uma sociedade aristocrática escravocrata. Parece muito provável que o surgimento da demonstração matemática na Grécia Antiga, nas áreas de Matemática, Filosofia e Lógica, foi em grande parte decorrente dessas difundidas práticas culturais centrais da contestação e do raciocínio dialético, que foram fundamentais às suas instituições democráticas públicas. (Ernest, 2003, p. 40)

Neste contexto, podemos afirmar que a formulação da parte teórica contida na Matemática teve sua origem nas escolas cientificas e filosóficas (jônica, pitagórica, eleata, socrática, platônica e aristotélica) da Antiga Grécia. De tal modo, os filósofos-geômetras gregos, ao proporem as primeiras teorias matemáticas que foram abstraídas de problemas concretos, proporcionaram os requisitos imprescindíveis e aceitáveis para o reconhecimento de autonomia, especificidade, organização, sistematização e generalização do corpo de conhecimento da Matemática grega. Assim, essa característica presente na formulação hipotético-dedutiva daquelas teorias conduziram esses geômetras à propensão de sistematizar os conhecimentos matemáticos, adquiridos pelos vários processos de raciocínio, com o intuito de apresentar de maneira lógica seus fundamentos. Essa metodologia foi estruturada e organizada pelas ideias filosóficas de Aristóteles que propunha os princípios de construção dessa ciência dedutiva. Esse procedimento axiomático atingirá seu patamar, indiscutivelmente, na obra *Os Elementos* de Euclides. Nesta perspectiva, apreciamos as considerações sobre a demonstração na Matemática grega do historiador Szabó:

> 1. A diferença notável entre a Matemática grega e a ciência do Oriente Antigo consiste no fato que os gregos demonstravam proposições matemáticas, ao passo que não há questão alguma de demonstração em textos de Matemática dos povos pré-helênicos.
> 2. A demonstração primitiva consistia nos gregos na ação de fazer ver concretamente. Isto é evidente com base no termo que se designa ao ato de demonstrar, o exemplo em Mênon e, finalmente, no próprio texto das demonstrações euclidianas (especialmente, em proposições geométricas).
> 3. A Matemática grega era desde a época pré-euclidiana um espaço de notável revolução. O ato de mostrar concretamente cessou de servir como demonstração e se procurou "mostrar" a exatidão das afirmações matemáticas de outra maneira. Eu acredito que a maneira mais precisa para caracterizar essa transformação é observar, como resultado de nossas análises anteriores, uma tendência exatamente oposta aos processos empíricos e à intuição. (Szabó, 1977, p. 212-213)

Para concluir, no decorrer da História da Matemática, pode-se afirmar que, em geral, não se descobrem proposições matemáticas simplesmente utilizando um procedimento puramente axiomático, ou seja, a demonstração matemática não pode ser concebida como algo pronto e acabado, porque em sua composição estão presentes os vários processos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc.) que contribuem para que se tenha ao final desse processo cíclico não sequencial uma construção de uma demonstração organizada, lógica e rigorosa.

A segunda pergunta: *O que constitui uma demonstração?*

Consoante Nickerson (2010), as demonstrações matemáticas são relativas de várias formas. Em primeiro lugar, qualquer demonstração matemática existe dentro de algum sistema axiomático específico, já que a verdade que ela estabelece é relativa aos axiomas desse sistema. Isto quer dizer, que a demonstração de uma proposição ou teorema estabelece apenas sua veracidade, uma vez que os axiomas do sistema são selecionados, organizados e mantidos para serem verdadeiros.

Em segundo lugar, a História da Matemática mostra uma gama de exemplos de demonstrações que no transcorrer do desenvolvimento da Matemática, após um período de repouso, num tempo considerável, se mostraram insuficientes para uma geração ou várias gerações posteriores. Alguns desses exemplos clássicos, conforme Eves, em especial, encontram-se nos *Elementos* de Euclides.

> Seria realmente muito surpreendente se *Os Elementos* de Euclides, sendo uma tentativa precoce e colossal do método postulacional de apresentação, estivesse livre de falhas lógicas. Portanto, não é descrédito para a obra que as investigações críticas tenham revelado vários defeitos em sua estrutura lógica. Provavelmente, os mais graves desses defeitos são certas suposições tácitas que são empregadas nas deduções; mas, que não são corroboradas pelos postulados e os axiomas presentes naquela obra. (Eves, 1972, p. 320)

De fato, no livro I, na proposição 1 – *Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada*. Para a demonstração, Euclides, utiliza nesta ordem: hipótese, postulado 3, postulado 3, postulado 1, definição 15, definição 15, axioma 1 e definição 20. Mas não há postulado algum nos princípios de *Os Elementos* que garanta explicitamente que duas circunferências intersectem-se em um ponto ou que uma circunferência intersecta-se com uma reta em um ponto. Tal fato implica a continuidade das circunferências e da reta. Assim, para garantir que haja esses pontos de intersecções, necessita-se da inclusão de postulados de continuidade (axioma da medida ou axioma de Arquimedes e o axioma linear da completabilidade ou de axioma de Cantor).

Em terceiro lugar, mesmo as demonstrações que são declaradas perfeitas diferem consideravelmente na sua capacidade de convencer, já que existem muitos teoremas (o teorema de Pitágoras, irracionalidade da $\sqrt{2}$, a infinidade dos números primos, teorema fundamental da aritmética, da álgebra, do cálculo, da álgebra linear, de homomorfismo, da teoria de Galois, teorema da função inversa, teorema de Stokes, teorema de Cantor, teorema da incompletude de Gödel, teorema de Lindermann-Weierstrass, teorema Fermat-Euler, lema de Zorn, lema Hopf, lema de Riesz, lema Poincaré, lema de Eudoxo-Arquimedes, desigualdade de Cauchy-Schwarz, etc.) que foram demonstrados de várias maneiras diferentes.

Em quarto lugar, quando se consideram perfeitas as demonstrações, elas variam também em sua simplicidade (beleza, elegância e atrativas para os matemáticos). As demonstrações deselegantes, complexas e feias, permanecem como desafios para que os matemáticos encontrem maneiras de deixá-las esteticamente melhores.

Em quinto lugar, o conceito de demonstração evolui e assinala que as mudanças na ideia do que constitui uma demonstração rigorosa têm gerado revoluções na Matemática. Por exemplo, a fundamentação axiomática: da geometria euclidiana, das geometrias não euclidianas, da lógica formal e teoria dos conjuntos, da álgebra, da álgebra comutativa, da álgebra não comutativa, da álgebra associativa não comutativa, da álgebra não associativa, da álgebra homológica, dos

grupos de Lie, da análise matemática real e complexa, da análise harmônica comutativa, da topologia geral, da topologia algébrica e diferencial, da geometria diferencial, das geometrias algébricas, das categorias e functores, dos espaços funcionais e operadores, das equações diferenciais e das equações diferenciais parciais, teoria dos números, etc.

Em sexto lugar, mesmo considerando períodos históricos da Matemática, o conceito de demonstração pode ter conotações díspares em contextos diferentes.

Finalmente, mesmo entre os matemáticos que concordam com as regras (estabelecidas pela comunidade matemática) que caracterizam uma demonstração, surgem controvérsias sobre a validade das demonstrações específicas. No entanto, por meio de anuências, os matemáticos (em suas várias especialidades) concordam de forma relativamente rápida quanto ao mérito da maioria das demonstrações propostas que surgem no ambiente da comunidade (conferências, congressos, colóquios, simpósios, revistas e periódicos especializados nos vários ramos da Matemática); porém, às vezes, ainda que haja um consenso entre os matemáticos quanto à adequação de uma demonstração complicada de algum teorema, pode levar um período extenso até sua completa estruturação (organizada, lógica e rigorosa) e validação pela comunidade matemática mediante a crítica e a arbitragem.

A terceira pergunta: *O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração?*

Segundo Rossi (2006), em seu trabalho diário, o matemático pode se utilizar do raciocínio indutivo para elaborar as suas hipóteses matemáticas, porém não é esse procedimento que ele emprega para demonstrar essas suposições, visto que, o método de raciocínio indutivo não garante a veracidade de sua conjectura. Assim, para o matemático demonstrar suas proposições, ele utiliza o método de raciocínio dedutivo, num esquema estabelecido por estrutura axiomática incorporada à Matemática que começa com um conjunto de axiomas e definições que são explicitamente declarados e, em seguida, com base nesses axiomas e definições, os matemáticos fazem conjecturas (proposições ou teoremas) que podem ser demonstradas utilizando uma sequência de argumentos lógicos viabilizados pelas regras da Lógica que fornece, de modo convincente, a veracidade do resultado.

A quarta e quinta perguntas: *Como as demonstrações são construídas? Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida?*

Para responder às interrogações formuladas acima, necessita-se recorrer à Filosofia da Matemática e à Lógica Matemática, as quais serão importantes para que se estabeleçam considerações consistentes com relação aos aspectos da demonstração. Neste enfoque, a Filosofia da Matemática busca explicitar aspectos intrínsecos relacionados à demonstração matemática e as diversas correntes filosóficas procuram mostrar, dentre os diferentes enfoques epistemológicos e ontológicos, que as várias demonstrações que se apresentam nos múltiplos ramos da Matemática são capazes de fornecer um conhecimento global dessa ciência. Por outro lado, em conjunto, a Lógica Matemática tem contribuído ao abordar esse tema, pois estuda e fornece explicações racionais de padrões axiomáticos utilizados pelos matemáticos na construção de uma teoria e, em especial, em formalizar e avaliar por meio de regras de inferências quando demonstrações em Matemática podem ser construídas e consideradas válidas no interior dessa área.

Nesta perspectiva, a construção de uma teoria matemática inicia-se com o estabelecimento de um sistema axiomático que comporta em sua constituição alguns elementos fundamentais: uma linguagem subjacente ao sistema axiomático; um sistema lógico; um vocabulário de palavras não definidas; um conjunto de proposições (axiomas) referente às palavras não definidas; e um conjunto de definições derivadas desse conjunto de palavras não definidas e desse conjunto de axiomas.

Assim, conforme Shoenfield (1967), em sistemas formais, a Lógica Matemática é a estrutura sobre a qual as demonstrações rigorosas são edificadas. Convém salientar que, externo à área da Lógica Matemática, os vários procedimentos utilizados nas demonstrações em Matemática quase nunca envolvem uma lógica formal. Porém, os operadores lógicos básicos (conjunção, disjunção e negação), as combinações primordiais que formam as tautologias e as contradições, método de demonstração por contradição, declarações logicamente equivalentes, declarações condicionais e as equivalências lógicas constituídas com outras declarações, declarações contrárias e contrapositivas e as combinações de sentenças declarativas condicionais estabelecem mediante a Lógica os métodos direto, contrapositivo e indireto com intuito de apresentar uma estruturação correta e rigorosa na validação das demonstrações em Matemática. Deste modo, para maiores detalhes, veja o anexo.

A sexta pergunta: *Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração?*

Ao se percorrer a História da Matemática, em diversos momentos, pode-se observar o surgimento de comunidades matemáticas inseridas em escolas filosóficas, academias antigas, museu, escolas monásticas, escolas catedráticas, escolas palatinas, universidades e academias de ciências; de certo modo, essas comunidades matemáticas foram responsáveis pelo desenvolvimento e divulgação da Matemática e, também, em particular, a partir do século XIX, implicitamente, de definir, julgar e deliberar sobre a validade de uma demonstração. Conforme Parshall:

> A Matemática tem uma história com elementos do contingente e do transcendente. Ao longo do século XIX, com o surgimento das nações, foi definida uma nova realidade geopolítica na Europa; a competição entre as nações se manifestou na adoção consciente dos contingentes, padrões culturais de nações vistas como as 'mais fortes'. No caso de Matemática, esses padrões culturais conscientemente partilhados estavam centrados em ideais educacionais, no desejo de construir comunidades profissionais viáveis e produtivas com meios eficazes de comunicação e a convicção crescente que a reputação pessoal e nacional fosse melhor estabelecida em um cenário internacional. (Parshall em Robson & Stedall, 2009, p. 85)

Outros aspectos importantes e presentes na formação da ciência Matemática foram: a estruturação, a organização e uma linguagem única em nível internacional professada pelas várias comunidades matemáticas. Realmente, consoante Parshall:

> Neste contexto, a Matemática também se tornou cada vez mais uma 'linguagem falada' e um esforço desenvolvido em nível internacional, isto é, entre os matemáticos das diferentes nações. Por exemplo, no final do século XIX e XX, um estilo italiano de geometria algébrica com seu próprio método muito idiossincrático de formação de teorema e de demonstração – a linguagem da geometria algébrica que, essencialmente, somente italianos falavam – desenvolvida no contexto de uma recém-unida nação-estado italiana procurando demonstrar a sua competitividade na arena internacional matemática e em paralelo com a tradição alemã muito diferente. Em meados do século XX, no entanto, após o advento da álgebra moderna, com sua abordagem estrutural e organização da Matemática, geômetras algébricos, quer nas Ilhas Britânicas, Alemanha ou Itália, ou nos Estados Unidos, China ou Japão falavam

> praticamente a mesma, nacionalmente transcendente, linguagem matemática, abordando importantes problemas em aberto, tal como reconhecidos por todos. (Parshall em Robson & Stedall, 2009, p. 85-86)

Além disso, segundo Parshall em Robson e Stedall (2009), outros aspectos importantes à consolidação das comunidades matemáticas são a fundação em 1920, da União Internacional de Matemática (IMU), a internacionalização de periódicos especializados na difusão do conhecimento matemático, a institucionalização em 1897 do Congresso Internacional de Matemáticos, a premiação com a medalha Fields, em 1936, em reconhecimento ao(s) excelente(s) trabalho(s) matemático(s) desenvolvido(s), o estabelecimento de agendas de pesquisas para os vários ramos da Matemática e a consolidação de uma linguagem matemática em nível internacional.

Considerações

Ao replicar e analisar as perguntas e as respostas, formuladas por Nickerson, relacionadas sobre a natureza da demonstração matemática, buscou-se a elaboração de um referencial teórico que contribuísse para uma melhor compreensão sobre os processos envolvidos na organização, construção e formalização dessa demonstração. Além disso, para completar as indagações daquele autor, optou-se por uma orientação histórica, filosófica e matemática que possibilitou uma reflexão aprofundada sobre o tema.

Desse modo, ao responder a primeira questão, ficou evidente que, no processo de demonstrar uma proposição matemática, estão implícitos alguns procedimentos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc.) que cooperam em sua organização lógica.

A resposta à segunda questão sancionou que as demonstrações em Matemática possuem existência no interior de um sistema axiomático específico e as demonstrações que são declaradas perfeitas diferem em sua capacidade de convencer. A evolução para a constituição de uma demonstração rigorosa promove revoluções na Matemática e, a comunidade matemática, mediante críticas e arbitragens, legitima as demonstrações em periódicos especializados. As indagações suscitadas ao responder a quarta e quinta questões sinalizam a importância da Filosofia da Matemática para estabelecer considerações consistentes com relação aos aspectos ontológicos e epistemológicos presentes na demonstração e, em conjunto, a Lógica Matemática estabelece e fornece métodos rigorosos de demonstração com intuito de apresentar a validação das demonstrações em Matemática.

Por fim, o próximo objetivo desta pesquisa é elaborar um panorama conceitual que aborde as concepções sobre demonstração em Matemática considerando as várias correntes da Filosofia da Matemática para investigar as concepções dos alunos de um curso de graduação em Matemática sobre demonstração.

Referências bibliográficas

Ernest, P. (2003). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. London: Taylor & Francis.

Eves, H. (1972). *A Survey of Geometry*. Boston: Allyn and Bacon.

Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. New York: Dover.

Joseph, G. G. (2011). *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Nickerson, R. S. (2010). *Mathematical reasoning: patterns, problems, conjectures, and proofs*. New York: Psychology Press, Taylor & Francis Group.

Parshall, K. H. (2009). The Internationalization of mathematics in a world of nations. In E. Robson & J. Stedall (Ed.). *The Oxford of the History of Mathematics* (pp. 85-104). New York: Oxford University Press.

Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logical*. Reading: Addison-Wesley.

Szabó, Á. (1977). *Les Débuts des Mathématiques Grecques*. Paris: J. Vrin.

Anexo

Sejam P e Q declarações, a declaração "P e Q" é denominada a *conjunção* daquelas declarações e simbolicamente representa-se por $P \wedge Q$; a declaração "P ou Q" é denominada a *disjunção* e representa-se por $P \vee Q$; e a declaração "não P" é denominada a *negação* e representa-se por $\neg P$. Ao construir as tabelas verdade da conjunção, da disjunção e da negação encontram-se declarações que são sempre verdadeiras (tautológicas) e as que são sempre falsas (contraditórias). Por exemplo, $P \vee \neg P$ e $\neg(P \wedge Q) \vee (P \vee Q)$ são tautologias; $P \wedge \neg P$ é uma contradição. Em geral, segundo Rossi (2006), demonstra-se que se P é uma declaração, T uma tautologia e C uma contradição, então $P \vee T$ é uma tautologia, e $P \wedge C$ é uma contradição. As declarações tautológicas e contraditórias desempenham um papel fundamental em Matemática. Em especial, o método de demonstração por contradição, também denominado demonstração indireta ou por *reductio ad absurdum* utiliza-se essa ideia.

Duas declarações são logicamente equivalentes quando têm tabelas verdade idênticas. Por exemplo, $\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$, P e $\neg(\neg P)$, $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$, $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$, as leis de De Morgan: $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$, $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ são logicamente equivalentes.

Em geral, quando se trata de demonstrar proposições, em Matemática, essas declarações são expressas da seguinte forma "a declaração ou função proposicional P implica a declaração ou função preposicional Q", denotada por $P \rightarrow Q$. Assim, considerando (H) hipótese e (C) conclusão, uma proposição condicional pode ser enunciada das seguintes formas: "se H, C"; "C se H"; "H somente se C"; "C desde que H"; "assumindo que H, então C"; "C dado que H"; "H é suficiente para C"; "C é necessário para H". Desse modo, podemos definir a declaração contrária e a contrapositiva de $P \rightarrow Q$, respectivamente, como $Q \rightarrow P$ e $\neg Q \rightarrow \neg P$ e demonstrar que $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ são logicamente equivalentes. Além disso, podemos demonstrar o teorema "se P e Q são declarações, então $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$" e seu corolário "se P e Q são declarações, então $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$". Utilizando a sentença declarativa condicional $P \rightarrow Q$ podemos demonstrar proposições pelos métodos direto, contrapositivo e indireto. O primeiro método, conforme Rossi (2006), segue o seguinte padrão:

Dado um teorema da forma $H \rightarrow C$, uma demonstração direta de $H \rightarrow C$ começa com o pressuposto das hipóteses do teorema. Valendo-se das hipóteses, é construída uma sequência de declarações lógicas que conduz à conclusão do teorema. Quando a sequência de argumentos lógicos que conduzem valendo-se das hipóteses (H) para a conclusão (C) for válida, então o teorema terá sido demonstrado com uma demonstração direta. Um diagrama de uma demonstração direta normalmente segue o padrão $H \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow \cdots \rightarrow C$ em que H conduz a uma conclusão C_1, C_1 conduz à conclusão C_2, e assim sucessivamente até que C, a conclusão desejada, seja alcançada. Este método de demonstração direta é denominado a abordagem direta para frente. Note-se que uma demonstração direta para frente começa assumindo que a hipótese (H) é verdadeira e então prossegue para frente, com uma sequência de argumentos lógicos que conduz à conclusão (C). (Rossi, 2006, p. 51-52)

O segundo método, consoante Rossi (2006), segue o seguinte padrão:

Recorde-se que, sempre que "Se H, então C" é um teorema, então a contrapositiva para esse teorema é também um teorema; isto é, cada teorema "Se H, então C" tem um teorema dual "Se não C, então não H", que também é verdadeiro. Além disso, se uma demonstração de "Se C não é verdadeira, então H não é verdadeira" for encontrada, então isso é equivalente a

demonstrar "Se H é verdadeira, então C é verdadeira". Assim, um segundo método de demonstração direta que pode ser usado para demonstrar "Se H é verdadeira, então C é verdadeira" é demonstrar a contrapositiva desse teorema: "Se não C, então não H". Demonstrar um teorema $H \rightarrow C$, demonstrando sua contrapositiva é denominado uma *demonstração por contrapositiva*. Note-se que o método de demonstração por contrapositiva também é outro método de demonstração direta e, muitas vezes, é usado quando uma demonstração direta para frente de um teorema não pode ser encontrada.

Agora, uma demonstração por contrapositiva começa com o pressuposto de que a conclusão do teorema é falsa, em vez de iniciar com as hipóteses do teorema. Com base na negação da conclusão (ou seja, $\neg C$), uma prova direta da negação das hipóteses ($\neg H$) é desejada como se segue. Uma típica demonstração por contrapositiva começa com o $\neg C$, o que conduz a uma conclusão C_1, o que conduz a uma conclusão C_2, e assim sucessivamente até que possa concluir que a hipótese H é falsa. (Rossi, 2006, p. 56)

O terceiro método, conforme Rossi (2006), segue o seguinte padrão:

Uma demonstração indireta do teorema "Se H é verdadeira, então C é verdadeira", começa por assumir que a hipótese (H) é verdadeira e a conclusão (C) é falsa. Trabalhando com base nessas duas declarações, uma sequência de conclusões lógicas é seguida até que uma contradição se desenvolva. Lembre-se que a contradição é uma declaração que é sempre falsa.

Agora, trabalhando valendo-se de H e $\neg C$, uma contradição comprova o teorema $H \rightarrow C$ mostrando que $H \wedge \neg C$ é sempre falsa, e desde que $H \wedge \neg C$ é logicamente equivalente a $\neg(H \rightarrow C)$(por $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$), segue-se que a negação do teorema também é falsa. Agora, se a negação do teorema é sempre falsa, então se tem o caso que o teorema é sempre verdadeiro. Assim, o método de demonstração por contradição comprova $H \rightarrow C$, demonstrando que $\neg(H \rightarrow C)$ nunca pode ser verdadeiro. (Rossi, 2006, p. 58-59)

Por fim, além desses métodos de demonstração explicitados anteriormente, existem outros métodos especializados de demonstração, que decorrem dos já citados, que são comuns em Matemática. Em particular, esses métodos são utilizados nas demonstrações por casos, por indução, de existência e de unicidade.

Un estudio socioepistemológico de la epistemología de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento matemático

Karla **Sepúlveda** Obreque
Instituto Politécnico Nacional
México
ksepulveda@uct.cl
Javier **Lezama** Andalón
Instituto Politécnico Nacional
México
jlezamaipn@gmail.com

Resumen

El trabajo presenta la etapa de investigación bibliográfica sobre la epistemología del conocimiento matemático. Nuestro fin es conocer las epistemologías que tienen los profesores que enseñan matemáticas en espacios escolares sobre este. Todo en el marco del trabajo de tesis doctoral en Matemática Educativa en CICATA del Instituto Politécnico Nacional de México. Nuestra motivación de lograr conocer las epistemologías del profesorado es con el fin de entender mejor la construcción actual del discurso matemático escolar y favorecer su transformación hacia el reconocimiento de la construcción social del conocimiento matemático. Pretendemos contribuir a la construcción de propuestas de enseñanza de las matemáticas contextualizadas, pragmáticas y funcionales que acepten más de una caracterización epistémica del conocimiento matemático.

Palabras clave: Epistemología del conocimiento matemático, epistemología de los profesores, relatividad epistémica, socioepistemología.

Antecedentes y planteamiento del problema

En la enseñanza de las matemáticas en América Latina se reconocen las ausencias de ciertos conocimientos. Estas ausencias, producidas por distintas índoles, están unidas todas por la racionalidad monocultural del conocimiento (De Sousa, 2010). Una forma poderosa en la producción de ausencias del conocimiento, según De Sousa (2009), consiste en la transformación de la ciencia moderna en un criterio único de verdad, otorgándole exclusividad canónica de producción de conocimiento y declarando inexistente todo aquello que el canon científico no reconoce o no comprende. El conocimiento científico moderno propone una concepción lineal del tiempo, con dirección y sentido único y conocido, en donde progreso, revolución, modernización y globalización establecen los conocimientos que dominan las instituciones. Dussel (1995) explica que en el siglo XVIII Europa creo una trayectoria histórica lineal entre la Antigua Grecia, el Imperio romano y la Europa moderna, esta trayectoria ha sido utilizada desde entonces como esquema ideológico básico del relato histórico, dejando fuera de la modernidad todo aquello que se aleje del momento actual. De Sousa (2009) argumenta que esta lógica produce la no existencia de todo lo que, según la norma, es temporalmente asimétrico en relación con lo que se declara avanzado, quitado validez de otros conocimientos, más allá del

conocimiento científico, invisibilizando a los conocimientos y criterios de validez que otorgan visibilidad a las prácticas cognitivas de las clases y grupos sociales.

Desde una perspectiva cognitiva la construcción del discurso matemático escolar ha estado, para Crespo, Farfán y Lezama (2009), basado en lo que durante siglos ha sido asumido como lógica clásica y que en realidad no es otra cosa que un conjunto de construcciones socioculturales. De su estudio sobre las características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica, concluyen que la presencia de los principios lógicos aristotélicos en un escenario sociocultural no sólo, no ha favorecido el surgimiento de algunos conceptos matemáticos, sino que más bien, han inhibido la construcción de algunos objetos matemáticos. Según De Sousa (2009), estamos colonizados por el conocimiento científico eurocentrista con bases en el pensamiento aristotélico. Para él, las independencias territoriales de América Latina no terminaron con la colonización cognitiva. Sostiene la no posibilidad de justicia social sin justicia del conocimiento.

Siendo la escuela una institución antropogénica que encuentra entre sus funciones la reproducción de las condiciones y los medios de producción en la sociedad (Althusser,1991), y en donde, desde lo didáctico la ontología atribuida al conocimiento en el aula está mediada por la epistemología que el profesor tenga de éste, conocer estas epistemologías que determinan sus formas de enseñanza, sus decisiones y sus opciones didácticas se hace para nosotros una necesidad que nos ayudará a comprender porque los profesores enseñan como enseñan configurando desde su práctica de aula un estado del conocimiento para nuestro continente.

Objetivo de la investigación

Conocer cuál es la epistemología que tienen los profesores sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

Marco teórico

La teoría que guía este estudio es la socioepistemología. La socioepistemología como teoría científica de la matemática educativa, "es un intento de explorar formas de pensamiento matemático dentro y fuera de la escuela posibles de difundir socialmente, caracterizarlos para su uso efectivo en la población" (Cantoral, 2013, pp 43). Desde aquí se comprende a la institución como estructurante de las formas de enseñanza y las formas de socialización del conocimiento, y dado todo lo anterior, también estructura los procesos de pensamiento involucrados. Esta situación, explica Cantoral (2013), ha movido incorporar aspectos sociales a la investigación didáctica, requiriendo ampliar el espacio de la escuela incorporando otras prácticas de referencia, generando un cambio conceptual de centración. La socioepistemología no se ocupa de los conceptos y sus estructuras conceptuales de manera aislada, sino que se enfoca en las prácticas que los producen y propician el uso de estos.

La socioepistemología como teoría ha reconstruido a nivel teórico el espacio didáctico incorporando la dimensión social, transformándose en un tipo de estudio sistémico de perspectiva socioepistemológica. En su carácter de teoría dinámica, declara Cantoral (2013), integra las dimensiones epistemológicas, didáctica, cognitiva y sociocultural, pretendiendo atender la complejidad de la naturaleza del saber matemático y su funcionamiento, problematizando el saber situado en la vida de las personas que aprenden. La socioepistemología es una alternativa al platonismo, entiende que las personas tienen la capacidad de construir explicaciones de la realidad que les es suya mediante procesos propios de construcción de

significados compartidos. Así, para Cantoral (2013), la construcción del saber surge de la actividad normada por lo que llama emergentes de naturaleza social a las que llama prácticas sociales. Algunos de los elementos anteriores pueden ser considerados coincidentes con lo que proponen Berger y Luckman (1989), al plantear que la realidad se construye socialmente y que la sociología del conocimiento debe analizar los procesos por los cuales esto se produce.

Para Cantoral (2013), las prácticas sociales, columna vertebral de esta teoría, se regulan en el ejercicio de prácticas compartidas a través de las cuales las personas se relacionan intersubjetivamente. Asuntos como la lengua o la religión, menciona, son emergentes sociales que no pueden ser construidos por sujetos individuales, requieren de sujetos sociales. La norma es en sí misma un emergente social, porque es creado por sujetos sociales. A estas prácticas sociales les atribuye características funcionales normativa, identitaria, pragmática y discursiva.

Desde la socioepistemología se asume una epistemología de las matemáticas que considera el papel de las prácticas sociales en la construcción del conocimiento matemático. El interés de los estudios socioepistemológicos no radican en las representaciones, el interés teórico no se sitúa en la preexistencia del objeto, sino que asume la diferencia entre la realidad del objeto, que llama realidad implicada y la realidad que producen los seres humanos en su acción, a la que llama realidad explicada. Cantoral (2013), explica que la socioepistemología no busca referirse teóricamente a la acción de representación del objeto mediante artefactos, herramientas o signos, sino que se ubica a nivel de prácticas y como estas se norman en prácticas sociales. Define que una práctica social no es lo que hace un individuo o grupo, sino lo que lo que les hace hacer lo que hacen. Una práctica social es normativa de la actividad humana.

A diferencia de la matemática escolar, ligada a los procesos de transposición, el docente desde la matemática educativa no restringe el problema didáctico al espacio de la sala de clases, sino más bien desarrolla una disciplina científica que tiene la intención no sólo de estudiar cómo enseñar, sino que al entender la dimensión didáctica en toda la vida humana, se ocupa de responder el qué enseñar, a quién enseñar y cuando enseñar. Cantoral (2013), agrega que esto lo hace en el espacio del aula extendida, esto es el aula de la vida cotidiana, por lo que, señala, la socioepistemología es "una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional" (Cantoral, 2013, pág. 139), por lo que el método socioepistemológico, es entonces, de naturaleza sistémica. La socioepistemología, declara Cantoral (2013), como teoría que emerge del cruce entre las Matemáticas, las Ciencias sociales y las Humanidades intentando explicar el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, es un programa de investigación en desarrollo.

Resultados de la revisión bibliográfica

Naturaleza del conocimiento matemático

Para comenzar hemos realizado una aproximación teórica a la epistemología del conocimiento matemático y a su desarrollo histórico en diferentes épocas y grupos humanos desde la Grecia clásica de Pitágoras, Platón, Aristóteles y Euclides; la Modernidad de Leibniz, Kant y Mill; las escuelas de fundamentación de la matemática como los logisitas, formalistas e intuicionistas hasta llegar a autores del siglo XX como Wittgenstein, Feyerabend y Lakatos.

Así encontramos que durante toda la historia la matemática se ha caracterizado por generar interés entre los filósofos. En Toranzos (1950), hallamos que la matemática ha ocupado tanto a filósofos antiguos, clásicos, medievales, modernos y contemporáneos. En Kline (1985) se muestra que en la filosofía griega a Pitágoras, el primer matemático puro, se le atribuye la teoría

de la significación funcional de los números en el mundo objetivo. Destacan entre sus principios que en su nivel más profundo, la realidad es de naturaleza matemática y que ciertos símbolos son de naturaleza mística. Por otra parte encontramos también en Kline (1985) que desde la Grecia clásica las matemáticas son para Aristóteles por entero un producto del pensamiento humano, esta postura será más tarde seguida por las corrientes intuicionistas y formalistas. Aristóteles también es quién sienta las bases de la necesidad lógica en las matemáticas. Este señalamiento que incide en la estructura de la matemática será retomado y ampliado más tarde por Leibniz. Por su parte Euclides aporta desde la construcción de conocimiento matemático a partir del razonamiento deductivo expresado en su obra Los Elementos. Todos estos filósofos clásicos han intentado conocer y comprender la naturaleza del conocimiento matemático, sin embargo se observa que en los últimos siglos ha predominado la influencia del a prioricismo platónico. Dumett (1998) señala que una de las características atribuidas a las matemáticas desde el platonismo, es que los objetos matemáticos existen y mantienen ciertas relaciones entre sí, independientemente de nosotros y lo que podemos hacer es descubrir estos objetos y las relaciones que se dan entre ellos. Font (2003), aludiendo a las ideas del platonismo, plantea que los objetos descubiertos en la actividad matemática, se caracterizan por su intemporalidad y la veracidad de sus relaciones y propiedades ya que pueden ser lógicamente demostradas.

Para Hernández (1993), la necesidad matemática no constituye una dificultad en sí, pero existen otras dificultades relacionadas con ésta a las que hay que enfrentarse, como por ejemplo aclarar criterios respecto de su naturaleza. El aprioricismo extensamente difundido es mencionado en Dumett (1998) en donde encontramos que algunas posturas están dispuestas a aceptar que los teoremas matemáticos son proposiciones genuinas, y por añadidura, proposiciones verdaderas. Estas además admiten que para mostrar la verdad de estas proposiciones no se necesita apelar a hechos establecidos mediante la observación concediendo que son verdaderas a priori. Al respecto Kant (1998), en su libro Critica a la razón pura, presenta una explicación más elaborada de cómo conocer a priori la verdad de ciertas proposiciones que podrían sin embargo no haber sido verdaderas. Él estableció una mixtura entre el racionalismo y el empirismo en la que en lugar de suponer que los objetos existen independientemente de nosotros y preguntarnos como de qué forma podemos conocerlos, propuso que nuestras actividades cognitivas son parcialmente constitutivas de los objetos de los cuales tenemos experiencia. Kant ve en las proposiciones matemáticas verdades necesarias, no obstante, a diferencia de Leibniz, quién dice que el predicado está contenido en el sujeto en todas las verdades, inclusive aquellas sintéticas, Kant no ve en ellas proposiciones analíticas. En su obra Crítica al juicio (2007), Kant plantea que en su opinión, las proposiciones matemáticas no se siguen necesariamente del análisis de los conceptos que figuran en ellas, son según él, juicios sintéticos a priori. Lo que explica la necesidad de las proposiciones sintéticas a priori de la matemática pura es, según Kant, la relación que guardan con las intuiciones puras o a priori del tiempo y el espacio. Para Hernández (1993), tales proposiciones no son juicios empíricos o de experiencia, ni se deducen de ellos, más bien, las intuiciones que las originan se hallan en nosotros a priori, es decir, con anterioridad a toda percepción de objetos y como una condición de posibilidad de tales percepciones. Al mismo tiempo, lo que distingue al conocimiento matemático de cualquier otra forma de conocimiento a priori es que procede no mediante el análisis de conceptos, sino mediante la construcción de conceptos en el tiempo y en el espacio. Kant desde el idealismo alemán intenta lograr un compromiso entre el racionalismo y el empirismo en donde se concibe que el conocimiento matemático a diferencia de otros conocimientos no surja de la observación, oponiéndose así a los planteamientos inductistas base

del positivismo. En Locke, como ejemplo, el conocimiento matemático era una certeza absoluta dado su carácter sintético y por tanto, diferenciable del conocimiento empírico. Mientras que para Mill, (citado por Font, 2003), esto sería distinto, puesto que desarrollo una concepción empírica de las matemáticas donde estas surgen únicamente de verdades necesarias, sino de hipótesis y axiomas que constituyen generalizaciones de la experiencia. Para Mill la enseñanza de las matemáticas requiere rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en virtud de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo estas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan. En nuestra revisión encontramos diversidad de planteamientos como los de empiristas, formalistas o neo-hilbertianos, por citar algunos, en donde se postula que para entender y explicar las matemáticas no basta con analizar su estructura lógica ni su lenguaje sino que hay que estudiar su práctica real, o tal como plantean los formalistas aludiendo a que las proposiciones de las matemáticas y la lógica pueden considerarse como declaraciones sobre las consecuencias de ciertas reglas de manipulación de símbolos o términos o cadena de caracteres; o como para los neo –hilbertianos en donde la matemática se sigue de un sistema finito de axiomas escogidos correctamente; y que tal sistema axiomático se puede probar de manera consistente. Así en la filosofía de las matemáticas se encuentran diversas posturas epistemológicas respecto de estas, pero en general la mayoría de las que han prevalecido encuentran su origen fuera de Latinoamérica.

También desde el positivismo lógico, plantea Popper (1994), se propone que toda teoría científica se constituye en un sistema axiomático. Desde estas proposiciones filosóficas lógicas de las matemáticas se origina una corriente conocida como neopositivismo con exponentes como Frege, Russell y Wittgenstein, quienes más tarde transitarán hacia una epistemología del conocimiento formalista. En esta concepción no hay objetos matemáticos, en oposición al platonismo solamente hay símbolos ostensivos. Para estos logisitas, explica Mosterín (1984), la matemática como sistema axiomático es una estructura conceptual dado que sus términos poseen un significado concreto, pese a que estos son solamente ideales. Además agrega, en la concepción epistémica de los formalistas como Hilbert, el sistema axiomático es una estructura abstracta en que los términos son como las incógnitas en un sistema de ecuaciones, o sea, no tienen mayor significado que el que les otorgan las relaciones del sistema al que pertenecen. Cabe agregar que esta epistemología del conocimiento matemático es atómica, por cuanto justifica antes que al sistema a las proposiciones que lo componen. Por otra parte, el formalismo, también positivista, es sistémico. Hilbert en Hernández (1993), afirma "si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencia, no se contradicen entre sí, entonces existen las cosas definidas por los axiomas". En la evolución del positivismo lógico ocurren cambios epistémicos que transitan desde el atomismo al sistemisismo en el propio criterio empirista de significado. Por otra parte, se presenta un cambio desde un sistema teórico significativo en que los significados teóricos se sustentan en los observacionales a un cálculo abstracto en que los términos significado mediante un sistema de reglas de interpretación. Vale decir que el empirismo en su epistemología del conocimiento matemático comienza considerando el significado de la proposición y rechazando la pseudo proposición para terminar aplicándose de manera general a un sistema de postulados y reglas de correspondencia. En la revisión de la epistemología del conocimiento matemático también encontramos a Frege (1973), quien critica la idea de que los números son propiedades de las cosas externas ya que el número que adscribimos a las cosas depende de cómo las clasifiquemos previamente y esto depende de nuestros propósitos, y también critica la idea de que el número sea algo subjetivo.

Wittgenstein (1921) intentando trazar los límites del significado sostiene que la actividad matemática trata de juegos de uso del lenguaje sometidos a reglas preestablecidas y a veces vulneradas por los mismos matemáticos. Wittgenstein defiende que nosotros seguimos estas reglas en el razonamiento matemático debido a una costumbre y no a necesidad lógica. Para él, "el mundo es todo lo que acaece… y lo que acaece, los hechos, es la existencia de estados de cosas" Wittgenstein (1921, p 16). En Font (2003), encontramos que el aporte pragmatista de Wittgenstein dice relación con evidenciar que lo sustancial es lo que los matemáticos hacen en la práctica y no los resultados de esta práctica. Otros pensadores en la historia han entendido que "las matemáticas no constituyen una solución a los problemas que plantea el conocimiento de la naturaleza. Las matemáticas son un instrumento, un lenguaje que sirve para relacionar mediciones y cuantificaciones" (Cesarman, 1982, p. 79). Aquí, epistemológicamente las matemáticas constituyen una forma de lenguaje ideal para describir el orden natural.

A diferencia de algunas posturas mencionadas, para Lakatos (2007) las matemáticas y su filosofía no se conciben apartadas de la epistemología general y sólo es posible entenderlas inmersas en ella. Él considera que el problema del fundamento de las matemáticas es un problema del fundamento del conocimiento en general, por lo que debe ser estudiado desde ahí. Crítica al dogmatismo y al escepticismo, aludiendo que estos constituyen los eslabones finales de una extensa cadena de posturas dogmáticas en la filosofía de las matemáticas. Lakatos (2007) entiende que las matemáticas constituyen una teoría empírica y como tal pueden aplicárseles los criterios metodológicos propuestos por Popper, esto es, la matemática contiene teorías refutables las que deben someterse a juicios críticos constantemente (falseo Popperiano), pues es la única forma en que se desarrolla el conocimiento científico. Aquí la lógica, deja de ser una herramienta para la contrastar teorías, sino para criticarlas. El conocimiento matemático, en Lakatos, no puede sostener sus certezas sobre la trivialidad de su contenido, como plantea el logisismo, sino que en conjeturas audaces y profundas, a costa de su falibilidad. Por su parte, Feyeranbend (1986), critica al racionalismo critico como la metodología positivista más liberal conocida, crítica la concepción de idea con significado como una colección de slogans tales como "verdad" o "honestidad intelectual", aludiendo que la discusión racional del conocimiento consiste en un intento de criticar y no de probar o de hacer probable.

A finales del siglo XIX y comienzos del XX surge una corriente filosófica llamada hermenéutica. Desde aquí según Paredes (2009) se plantea que cada pueblo tiene una historia particular, por lo que la historia de las sociedades no es lineal ni obedece a leyes, además el dualismo sujeto-objeto se desvanece al reivindicar la unidad de éstos. Esta corriente provoca una reacción del positivismo a la aparición del neopositivismo y la conformación del Círculo de Viena. Más tarde se agrega otra postura en donde se entiende al conocimiento matemático y la ontología de su existencia como una construcción a posteriori, este constructo de ideas, conceptos, métodos y creencias se conoce como constructivismo. El constructivismo en su carácter social, entiende las matemáticas como una espacie de actividad lingüístico, textual y semiótico, inmersa en la interacción humana y hace una crítica al positivismo en cuanto a su dogmatismo y su realismo ingenuo y crítico. Paredes (2009) refiere que fueron las propuestas de Berger y Lukmann, en su libro La construcción social de la realidad (1967), las que desarrollaron las tesis centrales de esta teoría. El constructivismo toma las posiciones interpretativitas de la hermenéutica llevándolas al extremo, proponiendo que el conocimiento es una construcción y no una representación, donde el sujeto conocedor no descubre fenómenos sino que elabora interpretaciones sobre éstos, rechazando las perspectivas del realismo ingenuo profesado por Comte y el realismo crítico de los neopositivistas, según los cuales la realidad existe

independientemente del sujeto y es percibida sensorialmente tal cual como se presenta. Por su parte, Kilpatrick (1990) refiere que el constructivismo evita la idea de la existencia de un mundo independiente externo, que puede ser aprendido por el conocimiento subjetivo, así el constructivismo sostiene la idea de la construcción subjetiva de los significados. Un problema epistemológico complejo del constructivismo, es según Kilpatrik (1990), resolver como la realidad objetiva puede ser entendida por el conocimiento subjetivo. Desde aquí se considera epistemológicamente que el conocimiento es constructivamente activado por el conocimiento subjetivo y no recibido pasivamente desde el medio ambiente. El constructivismo necesita conectar con la realidad, en nuestro caso de interés, con la realidad la actividad científica diaria, la investigación matemática y las prácticas de clase. El constructivismo como teoría epistemológica provee una explicación de cómo se produce el conocimiento y establece cuales serían las condiciones necesarias para que esta producción suceda, plantea entonces sus propias hipótesis que sustentan su cuerpo teórico. Waldegg (1998), las menciona como hipótesis gnoseológicas, aquellas que explican qué es el conocimiento, hipótesis metodológicas que explican cómo evoluciona el conocimiento y hipótesis éticas relacionadas al valor social del conocimiento. Dentro de las hipótesis gnoseológicas se sitúan las fenomenológicas que plantean que el conocimiento tiene su origen en interacción del individuo con el medio físico o social. La hipótesis fenomenológica permite expresar el carácter dialéctico que el sujeto cognoscente atribuye a sus percepciones, sumado a esto, su carácter recursivo respecto del conocimiento de los fenómenos propone una interdependencia entre el fenómeno percibido y su conocimiento construido. De aquí el conocimiento de las matemáticas aparece situado e individual.

Desde todo lo anterior se puede visualizar las dificultades asociadas a encontrar consensos sobre la naturaleza del conocimiento matemático y su organización y como esta no es estática sino que evoluciona históricamente. Para Font la sociología puede proveer las explicaciones de cómo se genera la actividad personal a partir de las instituciones y cómo la actividad institucional se genera a partir de la actividad de los miembros de la institución. Aquí, Font (2003) aludiendo a Heidegger (1975), explica que la actividad matemática es una determinada manera de pensar sobre las "cosas" y que los diversos enfoques en la historia se han encargado de debatir "cosas" como sobre la "manera de pensar" sobre estas "cosas".

Epistemología de los profesores

En Steiner (1987) encontramos que la filosofía de las matemáticas se proyecta en una forma de concebir la enseñanza, y la forma de concebir la enseñanza lleva implícita una visión epistemológica particular y filosófica de la matemática. Cañón (1993), plantea una pregunta dicotómica referida a si el conocimiento matemático se descubre o se inventa. Pretendemos conocer si para los profesores la matemática es creación humana o descubrimiento de un mundo de objetos y relaciones preexistente; si es una ciencia empírica con rigor lógico o si acaso el contexto sociocultural determina los resultados matemáticos.

Ernest (1991) menciona dos niveles de análisis para estudio filosófico de la educación matemática; el primero de carácter epistemológico, filosófico y moral y el segundo referido a la educación matemática en donde él establece los fines de la educación matemática. Posteriormente Ernest (1994) plantea una articulación entre conocimiento individual y el conocimiento social, por lo que son de gran importancia la actitud, creencias y conocimientos de los individuos sobre las matemáticas. Nosotros pretendemos conocer la epistemología de los profesores dentro de los niveles de estudio mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1
Niveles de estudio del conocimiento matemático del profesor.

Niveles de estudio	
Ontológico	Definiciones respecto del ser del conocimiento matemático.
Epistemológico	Atribuciones al origen del conocimiento matemático.
Metodológico	Visiones respecto de las formas de crear o descubrir el conocimiento matemático.
Cognositivo	Posturas frente a como se difunde y como aprehendemos al conocimiento matemático.

Fuente propia, de revisión bibliográfica

La epistemología como disciplina filosófica ingresa al espacio de la didáctica de la matemática a comienzos de los años sesenta y a partir de ahí se ha entendido bajo numerosas acepciones y ha sido asumido desde diferentes definiciones. Para D'Amore, se entiende como "un conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas" (D'Amore, 2008, P. 3). En Cantoral (2013), encontramos que epistemología obedece a la noción de origen que se le atribuye al conocimiento, de nuestro interés, al conocimiento matemático. Giroux (1998), plantea que el valor de las epistemologías subyacentes o tácitas del conocimiento, en nuestro interés el matemático, pueden aportar a la transformación de la educación a un espacio crítico y por consecuencia emancipatorio.

Para Zemelman (2005), en Díaz (2005), es importante interesarse en la formación pedagógica de los profesores latinoamericanos, en este caso sus epistemologías del conocimiento. En Zemelman (2001), encontramos que la realidad socio histórica tiene múltiples significados y no se puede abordar solamente construyendo teorías o conceptos, esto porque existe un desfase entre muchos corporas teóricos y la realidad. Por esto propone la necesidad de una constante resignificación como tarea principal de las ciencias sociales, especialmente sobre la dimensión de la construcción del conocimiento y su estudio epistemológico. Zemelman (2001), citando a Lakatos, dice que el ser humano ha podido progresar en la construcción de su conocimiento "porque la razón humana ha podido pensar en contra de la razón", porque el hombre ha sido capaz de pensar en contra de sus propias verdades, porque ha podido pensar en contra de sus certezas"

Para nuestro trabajo de estudiar las epistemologías del profesorado requerimos definir la actividad del profesor y en Linares (1999), encontramos que "ser profesor de matemáticas" se entiende como una práctica social: enseñar matemáticas. Esta práctica social se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada. Gascón (2001) propone que el trabajo de enseñanza requiere que los profesores tomen decisiones en las que, explícita o implícitamente, recurren a diversos tipo de conocimientos y convicciones sobre cómo se entiende, se aprende o se organiza el conocimiento, determinando de forma empírica sus supuestos epistemológicos. Nosotros la estudiaremos la epistemología de los profesores considerando en primera instancia tres categorías expuestas en la tabla 2.

Tabla 2
Categorías de la epistemología del conocimiento matemático

	Gnoseológica	Ontológica	Validativa
Epistemología	Cómo se llega al conocimiento matemático Es descubrimiento o creación	Que son las matemáticas, sus características.	Como se establece la validez del conocimiento matemático. Criterios para validarlo.

Fuente: Flores, 2010.

En la revisión de las epistemologías del profesorado Gómez (2007) presenta que los planteamientos conservadores y liberales de la educación han regido sustentado una lógica de racionalidad tecnocrática intentando establecer principios universales de la educación cimentados en el instrumentalismo. Al respecto, D'Amore (2008), expone que los principios de universalismo de origen eurocéntrico son cuestionados por el propio Habermas (1987), al declarar que su propuesta de universalidad, excluye de hecho la participación efectiva de cerca de cuatro quintas partes de la población del mundo. El concepto de eurocentrismo ampliamente desarrollado por Anibal Quijano se plantea como "uno de los ejes fundamentales de un patrón de poder de clasificación social de la población mundial sobre la idea de raza, una construcción mental que expresa la experiencia básica de la dominación colonial y que desde entonces permea las dimensiones más importantes del poder mundial, incluyendo su racionalidad específica, el eurocentrismo" (Quijano, 2000, p 201).

Para De Sousa (2010), el universalismo de Habermas es un universalismo benévolo e imperial, "ya que controla en pleno la decisión sobre sus propias limitaciones, imponiendo a sí mismo, sin otros límites, lo que incluye y lo que excluye". Para él la globalidad del modelo racional sienta sus bases en un epistemicidio que viene sucediendo hace siglos, desvalorizando todo tipo de saber distinto a las ciencias e incluso exterminándolos. Aquí la figura del profesor cobra importancia vital. En el entendido de la escuela como institución antropogénica, es el profesor el agente directo sobre los estudiantes.

En Llinares (1996) encontramos que desde la epistemología se han realizado análisis y reflexiones para determinar el status epistemológico del conocimiento del profesor. En este contexto, menciona algunos para clarificar las relaciones entre conocimiento y creencias como los de Fenstermacher, y Richardson (1993), así también otros investigadores que se han centrado en el análisis de la relación entre el conocimiento científico y el conocimiento del profesor como Schön, (1983, 1987), mencionado en Llinares (1996) y su implicación en los programas de formación como Grimmet y Mackinnon, (1992). Por otra parte, menciona Llinares, McEwan y Bull, (1991) se han centrado en el conocimiento del profesor sobre su forma de enseñar ha generado un debate sobre si o no podemos considerar como dos componentes /dominios de conocimiento separados el relativo a la materia y al conocimiento de contenido pedagógico específico de la materia.

El constructo conocimiento del profesor, para Clark y Peterson (1986), ha sido estudiado desde una perspectiva cognitiva con una serie de análisis con foco en el pensamiento del profesor sobre la planificación y la toma de decisiones. Desde este punto de vista, señalan Clark y Peterson (1986), el centro de interés de las investigaciones se han relacionado con los sucesos mentales de los profesores, sus conocimientos, creencias, epistemologías y procesos mentales como puede encontrarse más desarrolladamente en Borko y Livingston (1989). En Brophy (1991), encontramos que como consecuencia, de lo anterior un foco de interés de la investigación es el que busca determinar componentes del conocimiento y formas de describir el conocimiento,

las concepciones y creencias del profesor. Esto se puede evidenciar en las formas sistemáticas y compartidas de organizar y gestionar la enseñanza del conocimiento matemático de la institución. Gascón (1994) plantea que la práctica profesional del profesor de matemáticas sólo se modificará si se modifica el modelo epistemológico ingenuo que está en la base de los modelos docentes habituales.

Algunos modelos epistemológicos docentes revisados los referimos en la tabla 3.

Tabla 3
Modelos epistemológicos docentes

Euclideanismo	Teoricismo	Énfasis en conocimientos acabados expresados en teorías. Reduce el conocimiento matemático a un conjunto finito de proposiciones o axiomas.
	Tecnicismo	Transforma técnicas algorítmicas en el objetivo del proceso didáctico.
Cuasiempirismo		Destrivializa el conocimiento matemático centrándose en el proceso de descubrimiento y poniendo de manifiesto que el análisis de dicho conocimiento no puede reducirse al estudio de la justificación de las teorías matemáticas.
Modernismo		Concede una preeminencia del momento exploratorio. Así enseñar y aprender matemáticas se relaciona con enseñar y aprender a desarrollar una actividad exploratoria, libre y creativa, de problemas no triviales. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997),
Heurístico		Centra su interés en el proceso didáctico que busca el dominio de sistemas estructurados de técnicas heurísticas, es decir no algorítmicas.
Constructivismo		Aborda el problema epistemológico con una base empírica y considera los hechos que proporciona la historia de la ciencia y el estudio del desarrollo psicogenético.
Modelizacionismo		Interpreta aprender matemáticas como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos, relativos a un sistema matemático o extra matemático, desarrollado mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema. (Chevallard, 1989)

Fuente: Gascón, 2001.

Para referirse a la postua que pueden adoptar los profesores frente a la epistemología del conocimiento matemático, Kline (1985), describe un continuo de dos extremos, las matemáticas se descubren y las matemáticas son una creación humana. En el primer extremo describe una postura platónica, que considera las matemáticas como un cuerpo fijo, objetivo y único, de conocimientos, externo al hombre. En oposición está la postura que relativiza el conocimiento, al considerarlo generado por la mente humana, por lo tanto falible. Tymoczko (1986), citado en Flores (2010), identifica esta postura platónica con la realista, y la postura contraria con la constructivista. Es de nuestro interés conocer cuál de estas u otras epistemologías están presentes en los profesores de matemáticas respecto a la naturaleza del conocimiento matemático.

Conclusiones

Hasta aquí presentamos una sucinta revisión de lo expuesto en parte de la literatura científica sobre la naturaleza del conocimiento matemático y su evolución histórica y la

epistemología del conocimiento matemático de los profesores. La revisión histórica de las concepciones epistemológicas del conocimiento matemático tiende a una predominancia del pensamiento de origen europeo en América latina. Este modelo racional de interpretación ontológica del conocimiento matemático ha permeado el curriculum y determinando en parte el discurso escolar en la enseñanza de las matemáticas. Aparicio y Cantoral (2006), plantean que dicha perspectiva teórica ha orientado al discurso matemático escolar como espacio exento de cultura, ignorando que la construcción del conocimiento matemático está unida a aspectos que rebasan la sola organización teórica del contenido. Esta predominancia epistemológica lleva a plantearse la necesidad de buscar criterios validez del conocimiento más allá del conocimiento científico. Desde aquí (De Sousa, 2009) propone avanzar a construir lo que él llama una epistemología del sur, entendiéndose por sur una metáfora del sufrimiento humano a causa del capitalismo y colonialismo (De Sousa, 2009). Se requiere buscar "conocimientos y criterios de validez que otorguen visibilidad a las prácticas cognitivas de las clases y grupos sociales, que han sido históricamente victimizados" De Sousa (2009). Para él, los procesos de opresión y explotación han logrado excluir a grupos y prácticas sociales, pero esta exclusión ha ido acompañada de la exclusión de los conocimientos usados para llevar a cabo dichas prácticas.

Para el reconocimiento de epistemologías regionales del conocimiento se requiere remirar la epistemología del profesorado, pues ellos son una posibilidad de hacer visibles epistemologías diversas de origen regional para la validación de otros saberes más allá del conocimiento científico. Nos proponemos aportar a develar los procesos de construcción social del conocimiento, reconocer el valor de las prácticas sociales como generadoras de conocimiento y en este intento construir epistemologías con foco en el ser humano y sus contextos específicos. Esto no implica abandonar toda la tradición o ignorar las posibilidades históricas de emancipación social de la modernidad occidental. Por el contrario, significa reconocer la rica tradición heredada, pero entender que América Latina debe asumir su tiempo y comprender que tenemos problemas "modernos para los cuales no hay soluciones modernas". Estos problemas, están referidos a la falta de igualdad, de libertad y de fraternidad y requieren de intentos de solución locales, de nosotros para nosotros.

Referencias y bibliografía

Althusser, L. (1991). "Ideología y aparatos ideológicos del estado". Londres: New Left Books.

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 7-30.

Berger, P., Luckman, T. (1986). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires, Amorrortu-Murguía.

Borko, H., y Livingston, C. (1989). Cognición y la improvisación: Las diferencias en la enseñanza de las matemáticas por expertos y profesores noveles *Revista American Educational Research*, 26 (4), 473-498.

Brophy, J. (1991). Teachers' Knowledge of Subject Matter As It Relates To Their Teaching Practices. In J. Brophy (Ed.): Gr *Advances in Research on Teaching. vol. 2.*eenwich, Connecticut: Jai Press. 1-48.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, México: Gedisa

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática*, 18(1)133-160.

Cañón, C. (1993). *Las Matemáticas. Creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas

Cesarman, E. (1982). *Orden y caos. El complejo orden de la naturaleza*. México: Editorial Diana

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche, Publications nº 16 de l'IREM d'Aix-Marseille

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Clark, C. M. y Peterson, P. L. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.) *Hanbook of Research on Teaching* (3rd Edition) 255-296. New York: Mamillan.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Enseñanza de la matemática. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*. 17(1) 87-106.

De Sousa, B. (2009). *Una epistemología del sur.* Buenos Aires: Clacso-Siglo XXI.

De Sousa, B. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Montevideo, Ur.: Trilce

Díaz, J. (2005).Pedagogía de la Dignidad del Estar Siendo. Entrevista con Hugo Zemelman y Estela Quintar. Recuperado de http://tumbi.crefal.edu.mx/rieda/images/rieda-2005-1/aula_magna.pdf

Dummett, M. (1986). La filosofía de la matemática de Wittgenstein. *Thémata,* (3), 33-48.

Dummett, M. (1998). La existencia de los objetos matemáticos. *Teorema*, 17 (2), 5-24.

Dussel, E. (1995). *La invención de las Américas: Eclipse del "Otro" y el mito de la Modernidad*. Nueva York: Continuum.

Ernest, P. (1991). *Philosophy of mathematics education.* London: Falmer Press.

Ernest, P. (1994). What is social constructivism in the psychology of mathematics education? En J. Ponte y J.F. Matos. (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME*, (pp. 304-311). Lisboa.

Fenstermacher, GD, y Richardson, V. (1993). La obtención y reconstrucción de argumentos prácticos en la enseñanza. *Revista de estudios curriculares*, 25 (2), 101-114.

Feyerabend, P. (1986). Tratado contra el método. Madrid: Editorial Tecnos.

Flores, P. (2010). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada Esp: Granada Comares.

Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 249-279.

Frege, G. (1973). *Fundamentos de la aritmética: investigación lógico-matemática sobre el concepto del número*. Barcelona: Laila.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 6 (3), 37-51.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129-159.

Gasón, J. (2001). Algunos Problemas de Investigación Relacionados Con la Práctica Docente del Profesor de Matemática. *XVI Jornadas del SI-IDM*, celebradas en Huesca (30-31 de marzo y 01 de abril).

Giroux, HA (1990) *Los profesores como intelectuales: Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Barcelona: Paidós/MEC.

Giroux, H. A. (1992). *Teoría y resistencia en educación: una pedagogía para la oposición*. México: Siglo XXI.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, no pubicada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Habermas, J. (1987). *Teoría y práctica; Teoría y praxis. Estudios de filosofía social*. Madrid: Tecnos,

Hernández. C. (1993). Filosofías de la matemática y evolución del positivismo lógico. *Fragmentos de filosofía*, (3), 71-76.

Kant, I. (1998). *Critique of pure reason*. Guyer, P., & Wood, A. W. (Eds.). Cambridge University Press.

Kant, I. (2007). *Crítica del juicio*. Madrid: Tecnos.

Kilpatrick, J. (1990). Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la matemática. *Educar,* (17) 37-52.

Kline, M. (1985). La pérdida de la certidumbre. Madrid: Siglo XXI.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. In J. P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.) *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação?* (pp. 47-82). Secção de Educação Matemática. SPCE: Lisboa, Portugal.

Mosterín, J. (1984) La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático. En *Conceptos y teorías de la ciencia*. Madrid: Aliaza Universidad.

Lakatos, I. (2007). La metodología de los programas de investigación científica. J. Woral, G.Curri. (Eds.) (Trad. J. C. Zapatero) Madrid: Alianza Editorial.

Paredes, G. Críticas epistemológicas y metodológicas a la concepción positivista en las ciencias sociales. *Ensayo y Error*, Caracas, v. 18, n. 36, enero 2009. Disponible en *http://www2.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1315-21492009000100008&lng=es&nrm=iso.*

Popper, K. R., (1994). Búsqueda sin término: una autobiografía intelectual. Madrid: Tecnos.

Toranzos, F. I. (1950). *El panorama actual de la filosofía de la matemática y la influencia en el de D. Hilbert.* Argentina: Universidad Nacional de Cuyo.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher y J. Kilpatrick, (Eds),. *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (*pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein,L.(1921). Tractatus logico-philosophicus (trad. Arcis). recuperado en *http://www.philosophia.cl/biblioteca/Wittgenstein/Tractatus%20logico-philosophicus.pdf*

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Zemelman, H. (2001). Pensar Teórico y Pensar epistémico. Los Retos de las Ciencias Sociales Latinoamericanas. IPECAL, Instituto pensamiento y cultura en América Latina. Recuperado en: *http://www.google.com.mx/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CCQQFjAB&url=http%3A%2F%2Fecaths1.s3.amazonaws.com%2Fantropologiaslatinoamericanas%2F1720829167.Zemelman-latinoamericapensamiento.pdf&ei=EPSQVMHuMMWlgwSki4TABw&usg=AFQjCNGyXvGPvTRiqfVTCBcjf5lLO5Q1lw&sig2=9lJecmSArq7mD_kRLzFQyw&bvm=bv.82001339,d.eXY*

Una deriva de tiempos en la obra de Galileo

Leonora **Díaz** Moreno
Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso
Chile
leonoradiazmoreno@gmail.com
Jaime **Arrieta** Vera
Universidad Autónoma de Guerrero
México
jaime.arrieta@gmail.com

Resumen

La emergencia de lo cuadrático en Galileo se explica desde una trama compleja de prácticas-con-vivencia que concurren en su vida. Distinguimos un entramado de ellas a las que constituimos en soporte para entender, desde la complejidad, las metáforas de tiempo a las que recurre Galileo, en tanto construye un modelo cuadrático del tiempo con respecto de la distancia recorrida de un objeto en caída libre. Las metáforas en la obra de Galileo son variadas y enactan como herramientas junto a procedimientos y argumentos requeridos por las intenciones de su actividad. Con el tiempo-pulso obtiene datos experimentales de una esfera rodando por un plano inclinado. Ajusta estos datos a un modelo cuadrático a partir del tiempo-número. Aludiendo al tiempo-peso divulga sus resultados. Con el tiempo-intervalo demuestra sus teoremas según procedimientos geométricos euclídeos.

Palabras clave: epistemología de las matemáticas, metáforas de tiempo.

Antecedentes del estudio

Las distancias entre saberes de la vida diaria, los escolares y los eruditos, arraigan sus raíces en matrices de sentido de epistemes propias a cada uno de esos ámbitos. A modo ilustrativo: el aula naturaliza el desarrollo de las gráficas haciéndolas esquivas a los entendimientos estudiantiles. En particular los estudiantes en sus figuras gráficas no visibilizan al tiempo. Se requiere elaborar puentes de diálogo entre las naturalezas de los saberes en juego (Díaz, 2006, 2008):

Desde nuestra experiencia subjetiva temporal no obtenemos alguna imagen directa que nos den los sentidos respecto del tiempo. Tal experiencia de temporalidad la recuperamos en un proceso imaginativo. Contamos con distintas referencias del tiempo, presentes en la vida diaria y más o menos permeadas por metáforas de tiempo construidas desde distintas prácticas socialmente compartidas (op. cit., 2008, p. 881).

Díaz, Gutiérrez, Ávila y Carrasco (2007) abordan la deconstrucción de la noción de tiempo entre los estudiantes. Díaz reporta como el tiempo estudiantil (op. cit., 2008, p. 886):

> … resulta constituido por una red –ni numérica ni lineal- compleja de intencionalidades y coordinaciones que se estructuran a partir de las necesidades de coordinación con lo otro, con los otros y de las proyecciones intencionales hacia un futuro y un pasado, constituyéndose(lo) (para) cada persona a la manera de un collage heterogéneo e irreversible. Permeado por *los tiempos* de *su tiempo*: histórico, de la vida, dinerario, de la simultaneidad.

Se hace más plausible que los estudiantes figuren el tiempo en una gráfica de la caída libre de un móvil, si los diseños de enseñanza dialogan tanto con los tiempos estudiantiles como con las ideas de tiempo comprometidas en el establecimiento de la ley de caída de los graves por Galileo, identificando la diversidad de sentidos de tiempo que concurren al evocarlo por los estudiantes así como por quien estableciera la covariación entre un tiempo "físico" y los desplazamientos de un móvil en caída libre. Ello motiva el estudio que se reporta de los tiempos a que recurre Galileo cuando experimenta con la caída de los graves.

Una visión compleja de la práctica de Galileo

Las prácticas de Galileo que lo llevaron a construir un modelo cuadrático del tiempo con respecto de la distancia recorrida de un objeto en caída libre, se develan en la concurrencia de prácticas-con-vivencia que provienen de diferentes afluentes: la práctica musical, las habilidades manufactureras en la elaboración de laudes, la numerización de la que es experto, la figuración del movimiento, su práctica discursiva y la comunicación de los resultados científicos en un marco euclideano, trama de prácticas que concurren en un lugar y en un tiempo, en el lugar de la con-vivencia.

El estudio de la complejidad de las prácticas que concurren en un tiempo y en un espacio, en una comunidad, indexadas diría Varela, o las que llamamos Prácticas-Con-Vivencia (P-C-V) requieren de medios que, desplazándose en el tiempo, expliquen por qué se hace, cómo se hace, con que herramientas se hace y cómo se justifica lo que se hace.

Existencia-haciendo-algo indica el hecho de que el hombre, la mujer se despliegan siendo en la trama de prácticas de los seres humanos que concurren en tiempos y lugares. A esta trama concurren propósitos, explícitos o no, que explican por qué hacen lo que hacen los seres humanos. Propósitos entrelazados y retroactuantes con los procedimientos y herramientas, que explican cómo lo hacen y con qué elementos lo hacen. Que a su vez se imbrican en una red de argumentos que levantan los actores en su con-vivencia.

La emergencia de lo cuadrático en Galileo se explica desde una trama compleja de prácticas-con-vivencia que concurren en su vida.

Analizamos el caudal de prácticas de Galileo, deconstruyéndolo, examinando las prácticas que lo alimentan y que concurren a configurarlo. Desde la pregunta por la emergencia de lo cuadrático en su experiencia científica, deconstruimos develando redes de intenciones, procedimientos, herramientas y argumentos.

Aunque no es posible analizar e interpretar a la totalidad de prácticas-con-vivencia, pues estaría en contradicción con la perspectiva compleja que adoptamos, distinguimos un entramado de ellas a las que constituimos en soporte para entender, desde la complejidad, la emergencia de lo cuadrático en Galileo.

La práctica musical y las habilidades manufactureras de Galileo

Sobre la vida de Galileo hay numerosos estudios. Entre ellos los de Drake (1973, 1978) quien explora la influencia que Vincenzo Galilei (1520-1591) su padre, pudo haber tenido sobre su hijo.

Vincenzo Galilei tuvo una cultura bastante amplia, dominaba el laúd, fue un teórico de la música, formó parte de la Academia o Camerata de' Bardi, y era conocedor de las lenguas clásicas y la matemática. Galileo disfrutaba acompañando a su padre con el laúd o el órgano (Drake, 1973). Mantuvo una polémica con Zarlino acerca de los intervalos permisibles para la música que basaba su modelo en la teoría pitagórica. Para Vincenzo todo ello era numerología y sumisión de la práctica musical a una teoría preestablecida; señalaba que de hecho los músicos utilizaban otros intervalos, pues la ***consonancia es asunto de oído bien entrenado y no de prejuicios teóricos***. En suma Vincenzo contraponía la práctica musical a los prejuicios de la teoría de Zarlino. También fue un famoso lutier de su época, elaboró laudes muy apreciados por los músicos de su época y diseñó una serie de experimentos con cuerdas. Para sostener sus supuestos teóricos musicales experimenta con tensiones y frecuencias en los laudes que construye, coloca los trastos a diferentes distancias, hasta encontrar una forma que le satisfaga su oído musical. Pule maderas y las deja suaves, lizas y tersas, coloca los trastos en el mástil. Galileo ayudaba a su padre. La manufactura de laudes de Galileo fue una práctica *vivenciada con* su padre.

Según Drake (1978), Galileo asistió a estos experimentos e incorporó luego las ideas de su padre: "Me parece —escribió el padre de Galileo— que quienes confían sin más en la autoridad como prueba de una cosa cualquiera y no tratan de aducir una razón válida, proceden de forma ridícula" (Drake, 1978, citado por Alvarez, 2000, p.23).

Para los artesanos del renacimiento fabricar un plano *liso y pulido* y una bola esférica no era una tarea imposible. Galileo con-vivencio en su niñez y juventud tanto prácticas de la manufactura de laudes como las musicales y las discursivas, donde las evidencias de los hechos conforman los argumentos principales.

La clepsidra y el tiempo-peso

Si bien hay evidencias de que el plano inclinado es sugerido por Guidobaldo del Monte a Galileo, alrededor del año 1600, para estudiar la trayectoria parabólica de los proyectiles, el plano inclinado de Galileo para experimentar la caída libre de los cuerpos, es diferente.

La práctica de Galileo, vivenciada con su padre, en la manufactura de laudes, le permite construir sus instrumentos experimentales adecuados. Galileo requiere restringir la fricción y el deslizamiento existente de todo cuerpo que ruede a través de un canal inclinado. Necesita un canal *liso y pulido* de unos cuantos metros y una pelota como una esfera sin imperfecciones, que en esta época era muy difícil construir. Sin embargo sus habilidades en la talla de maderas y en la experimentación con diferentes materiales permiten construirlos. Otro elemento que contribuye a aminorar la fricción y el deslizamiento de la esfera es que el plano no esté muy inclinado. Sus prácticas que devienen de la geometría euclidea le permiten colocar el plano con un ángulo pequeño de inclinación. Pero no basta con un plano con rozamiento casi cero, hay otro factor tan complicado o más que el primero: la cuantificación del tiempo.

Entre 1603 y 1604 Galileo se plantea ¿Cómo caen los graves? Ya tiene a la mano un plano inclinado que utilizo para otros fines y ahora se propone utilizarlo para cuantificar el tiempo y relacionarlo con cantidades de desplazamientos.

Galileo necesitaba instrumentos y medios materiales que le permitieran obtener los datos empíricos necesarios para relacionar las distancias recorridos de una esfera rodando en el plano inclinado con los tiempos ocupado para ello, en particular, un medio que le permitiera medir intervalos de tiempo muy cortos en sus experimentos sobre la caída libre. ¿Cómo halló Galileo la forma para medir tiempos cortos? Hay diferentes versiones de Galileo para responder esta pregunta. En los Discorsi Galileo escribe:

> En lo que respecta a la medida del tiempo, se empleaba un gran cubo lleno de agua, suspendido en alto, del cual, por un delgado canalito soldado en su fondo, caía un fino hilo de agua que se recogía en un pequeño vaso, durante todo el tiempo en que la bola descendía por el canal y por sus partes. Luego, las partículas de agua recogidas de este modo, se iban pesando cada vez con una balanza exactísima, dándonos las diferencias y proporciones de sus pesos, las diferencias y proporciones de los tiempos; y esto con tal precisión que, como ya he dicho, repetidas una y otra vez estas operaciones, nunca diferían de modo apreciable (Discorsi, Opere, VIII, pp. 212-214).

En esta cita de los Discorsi Galileo argumenta con una construcción del tiempo que está relacionada con el peso de una cantidad de agua, tiempo-peso. A la manera, conocida en su época, de los relojes de agua o clepsidras, utilizados desde la antigua Babilonia (1400 AC). Las clepsidras no proporcionan la hora de la manera actual, marcaban cantidades de tiempo en el que tarda en vaciarse una determinada cantidad de agua de un recipiente a otro. Se usaba, por ejemplo, para marcar el tiempo para hablar de los políticos en la antigua Grecia.

Es importante observar como Galileo intenta relacionar "las diferencias y proporciones de sus pesos (del agua que desciende por el canal, con) las diferencias y proporciones de los tiempos". Sin embargo, una "balanza exactísima" como la que propone en una carta de Galileo a Balioni "si nos servimos de una balanza tan exacta que es capaz de pesar un sesentavo de grano (Galileo a Baliani, 1 de agosto de 1639, Opere, XVIII, pp. 76-77).

En palabras de Romo (2005, p. 20) "Su afirmación final es cuando menos chocante: su balanza tiene una precisión de 0.1 miligramos. No es extraño que, en su respuesta, Baliani ignore totalmente el método propuesto por Galileo para la medida del tiempo y, en su lugar, prefiera utilizar un péndulo de periodo conocido".

La música y el tiempo-pulso

En otro pasaje del Discorsi Galileo menciona

> En un tablón, o si se quiere, en una viga de madera de unas 12 brazas de largo y media braza de ancho por un lado y 3 dedos por el otro, se había tallado, en esta anchura menor, un canalito poco más ancho de un dedo; habiéndolo trazado muy recto, y, después de ***pegarle en su interior un pergamino bruñido y lustrado*** todo lo posible para tenerlo muy pulido y liso, se hacía descender por él una bola de bronce durísimo, muy redonda y pulida; … el tiempo que empleaba para recorrerlo todo, repitiendo el mismo acto muchas veces, para ***asegurarnos bien de la cantidad de tiempo***, ***en el cual jamás se encontraba una diferenciani siquiera de la décima parte de una pulsación***…se encontraba siempre que los espacios recorridos están entre sí como los cuadrados de los tiempos, y esto en todas las inclinaciones del plano, esto es, del canal por el que se hacía descender la bola (Discorsi, Opere, VIII, pp. 212-214)

La argumentación desde esta cita de Galileo se configura a partir de un tiempo diferente del tiempo-peso, el tiempo medido por pulsaciones el tiempo-pulso.

Naylor (1974), a partir de su reconstrucción de los experimentos de Galileo, concluye que el experimento de los Discorsi no puede ser tan preciso como pretende Galileo: "este experimento no permite confirmar la ley con la precisión que Galileo afirma haber conseguido" (Naylor 1974, p. 133).

En la reconstrucción del experimento del plano inclinado, Naylor, siguiendo escrupulosamente la descripción de Galileo, revistió con pergamino el canal por el que desciende la esfera y en contra de lo que podría pensarse al leer el texto de Galileo, el efecto del pergamino retarda el movimiento de la esfera. Ello es porque la longitud del canal obliga a utilizar más de una pieza de pergamino, con lo que las inevitables junturas entre ellas perturban el movimiento. Naylor afirma que si Galileo podía medir tiempos con la precisión que pretende —la diferencia entre predicciones y resultados no excedía "la décima parte de una pulsación" (o sea 0.08 segundos, si se toma el valor estándar de 75 pulsaciones por minuto) este hecho no podía escapársele. Entonces ¿por qué introduce el detalle del pergamino en la descripción? (Naylor 1974, p. 133).

¿Para qué introduce el papiro corrugado y después lustrado que recubre a su plano inclinado? ¿Para que emitiera sonido al pasar la pelota? Si es así, la clave está en la música.

Galileo colocó "trastes" en el plano inclinado que emitieran sonidos al paso de la bola con este mecanismo comprobó que la bola, al rodar hacia abajo, recorría más distancia en un pulso que en el anterior. Los objetos aceleraban al caer, es decir se movían cada vez más de prisa conforme a la distancia recorrida y el tiempo. Es entonces que Galileo construye un canal con marcas para producir ruido. Nuestra hipótesis es que el plano de Galileo no era otra cosa que un mástil con trastes de un laúd, que colocados convenientemente, producían un traqueteo uniforme.

La precisión para considerar estos pulsos es la que le otorga su oído musical que ha logrado desarrollar en la práctica que ha con-vivenciado con su padre entre otros. Un director de orquesta o alguien con buen oído musical es capaz de percibir diferencias de tiempo del orden de décimas de segundo o aun menores. Durante la interpretación de una sinfonía, por ejemplo, el director y los ejecutantes se pueden percatar cuando alguno de los integrantes de la orquesta "entra tarde" en su correspondiente ejecución. Esto no es porque ellos lleven el tiempo minuciosamente con algún cronómetro exacto; un músico lleva un ritmo interno que incluso le permite percatarse cuando un péndulo musical está fallando.

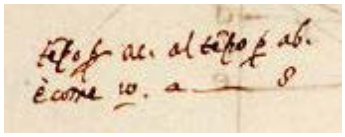
La figuración del tiempo, el tiempo-segmento

Galileo emplea diferentes formas de cuantificar el tiempo de acuerdo a sus intenciones. Utiliza el tiempo-peso para explicar y argumentar en los Discorsi la relación con respecto de la distancia recorrida de la esfera al rodar. El tiempo-pulso para obtener datos que fundamenten su modelo del tiempo respecto con la distancia recorrida. Pero además muestra explícitamente una forma de figurar el tiempo, el tiempo-segmento, que utiliza en el discurso como herramienta para la creación y la presentación de sus resultados en los Discorsi.

Notemos que Galileo no cuenta con la figura cartesiana de nuestros días para hacer visible a la mirada el transcurrir del tiempo. Galileo organiza elementos con que cuenta, entidades hasta ese momento formalmente separadas. Estudios cognitivos y sociológicos vienen reportando cómo la construcción de conocimientos recurre a las metáforas (Díaz, 2005). Galileo recurre a lo que hoy se llama el artilugio de las metáforas visuales por familiaridad (Moreno Lara, 2005, citado por Ortiz, 2011). Se trata de una imagen en la que un observador percibe o intuye una

semejanza entre dos entes, pudiendo uno de ellos estar presente de modo parcial o no ser ostensible en ella (Aguilar, 2012). De este modo Galileo "captura" al tiempo en un segmento euclídeo, dotándolo de una figuración geométrica (Carrasco, Díaz y Buendía, 2014).

Galileo pega el tiempo que transcurre cuando un móvil se desplaza entre los puntos a y b con un segmento que nomina ab. En este espacio epistémico de figuración inaugura la yuxtaposición de entidades familiares como transcursos de tiempo y longitudes de segmentos. Trae a la mano, entre otros procedimientos, herramientas y argumentos, los provenientes de la proporcionalidad euclídea. Iguala razones de cantidades de tiempos transcurridos con razones de longitudes de intervalos.



tempo per ac al tempo per ab è come 10 a 8

Figura 1. Frase del Folio 35v

Uno de sus muchos ejemplos de trabajo en este espacio epistémico aparece en el Folio 35V (Galilei, 1999). El teorema V, Proposición V expuesto allí incluye al tiempo segmento-entre sus herramientas: *Ratio temporum lationum super planis (deletion) quórum diversae sint inclinationes, et longitudines, nec non elevationes inaequales, componitur ex ratione longitudinum ipsorum et ex subdupla ratione elevationum eorumdem permutatim acepta* (los tiempos de descenso a lo largo de planos de diferente longitud, inclinación y altura mantienen una relación que es igual producto de la relación de sus longitudes por la raíz cuadrada de la relación inversa de las alturas). En otras palabras el teorema afirma que el tiempo de descenso a lo largo de AC es al tiempo de descenso a lo largo de AE como el largo de AF es al de AE según Galileo ilustra en este folio. A lo largo de su obra volverá a recurrir a la media proporcional de dos segmentos, constituyéndose en un recurso característico a sus desarrollos.

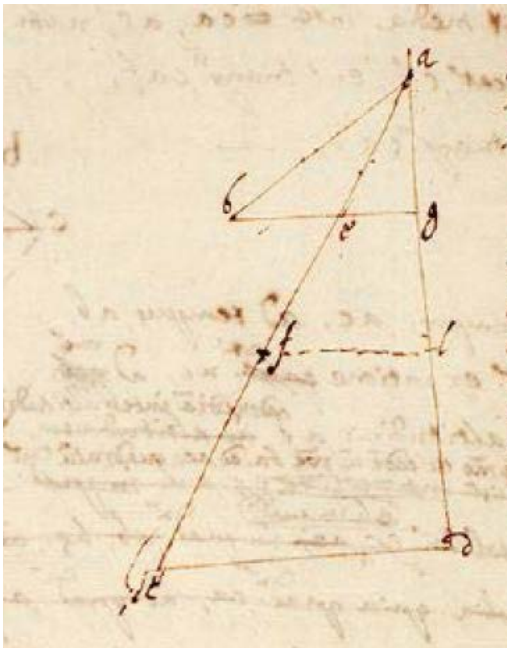


Figura 2. Ilustración 9 Folio 35v

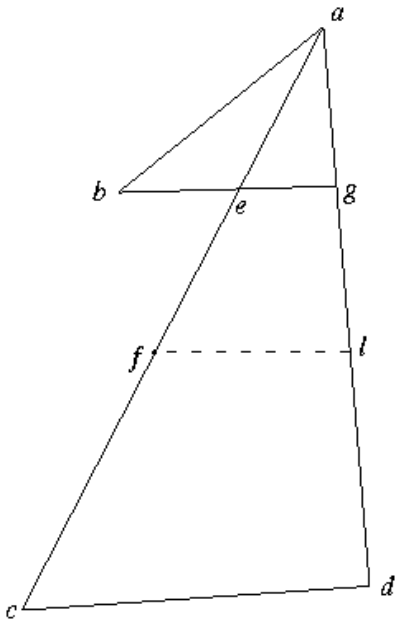


Figura 3. Esquema 1 Folio 35v

Galileo argumenta en el problema XV, Proposición XXXVII: *Si itaqueponatur, tempus per AB esse ut AB, erit AC tempus per AC* (entonces, si ponemos el tiempo por AB es a AB como el tiempo por AC es a AC) usando explícitamente la relación proporcional entre transcursos de tiempo y longitudes de segmentos. También en el Teorema II proposición II de los de los Discorsi, Galileo hace mención de su tiempo-segmento: *Intelligatur, fluxustemporis ex aliquo primo instanti A repraesentari per extensionem AB, in qua sumanturduoquaelibettempora AD, AE* (todo el flujo de tiempo en el primer instante Aes representado por la línea recta AB, en la cual se toman dos tiempos cualquiera AD y AE).

Los argumentos que expone en los Discorsi están relacionados a razones y proporciones de longitudes de intervalos. De esta forma el tiempo-intervalo le fue útil en el horizonte de sus procesos de cuantificación.

La numerización del tiempo, el tiempo-número

Los procedimientos de Galileo tomaron base inicialmente en razones y proporciones, no en unidades estándar de medición, en particular, del tiempo. Esta forma de concebir un tiempo-segmento lo conduce a otros procedimientos, herramientas y argumentos. Para dilucidar como lo hacía acudimos al Folio 107 V. En una parte del folio se observan tres columnas de números, en la segunda una sucesión de números enteros, en la primera sus cuadrados y, en la tercera, números que son cercanos a una relación lineal con respecto de los de la primera columna (figura 4).

Estas numerizaciones, a nuestro juicio, corresponden a pulsos de tiempo (la columna 2), el cuadrado de estos pulsos (columna 1) y las distancias recorridas durante los pulsos. El ajuste de datos a un modelo lineal de los datos de la primera columna con respecto a los de la tercera con herramientas de nuestro tiempo es $d = 33.16t^2 - 2.40711$. Que si atendemos a las marcas en la cuarta columna (+, -) podríamos pensar que Galileo está ajustando de alguna manera al modelo $d = 33t^2$ como Álvarez y Posadas (2003) lo muestran.

Tiempo al cuadrado	*Tiempo*	*Distancia recorrida*		*Tiempo al cuadrado por 33*	*Diferencia*
1	1	32		33	0
4	2	130	-	132	-2
9	3	298	+	297	1
16	4	526	+	528	-2
25	5	824		825	-1
36	6	1192	-	1188	4
49	7	1620		1617	3
64	8	2104		2112	11

Figura 4. Parte del folio 101v y nuestra interpretación de este

Galileo midió el tiempo mediante pulsos musicales, intervalos de tiempos iguales. El tiempo está cuantificado, constantificado, transcurre de pulso a pulso, como los números naturales del 1 al 8. Galileo numeriza al tiempo-pulso con los números naturales. Numeriza las distancias recorridas e identifica relaciones entre los números para poder dilucidar sus relaciones físicas. La numerización como práctica-con-vivencia de Galileo tiene como entes a la mano relaciones de números articuladas con cualidades físicas que devienen en un tiempo-pulso. Es así que la numerización es una extensión de la experimentación, las cantidades numéricas expresan

cualidades físicas (tiempos, distancias, velocidades) las relaciones numéricas son relaciones entre entidades físicos. En la numerización de Galileo existe un continuo vaivén entre procedimientos físicos, geométrico-euclídeos y numéricos.

La asombrosa capacidad para operar con números proviene de su práctica con-vivencia con su tío comerciante y, entre otras, por su práctica-con-vivencia con su profesor, Ostilio Ricci, discípulo de Tartaglia.

Conclusiones

Las metáforas de tiempo en la obra de Galileo son variadas y emergen en situaciones de acuerdo a sus intenciones. Galileo usa el tiempo-peso para favorecer la divulgación de sus hallazgos pues los clepsidras son los instrumentos convencionales de su época para cuantificar el tiempo, aun cuando estos no sean los adecuados para su experimentación. El tiempo-segmento emerge cuando tiene la intención de demostrar sus proposiciones de acuerdo a la matriz euclídea, canon científico de su época. El tiempo-pulso que usa en sus experimentaciones le resulta una herramienta útil para obtener datos experimentales de una esfera rodando por un plano inclinado. Este tiempo-pulso dará paso al tiempo número con el que ajusta esos datos experimentales a un modelo cuadrático.

Poner en la escena de aulas de matemáticas y de ciencias experimentales el versátil recurso a distintos tiempos de Galileo favorecerá el desplazamiento desde nociones ingenuas de la construcción de la ciencia y de las matemáticas a unas más complejas y no complicadas o alejadas de las posibilidades estudiantiles de crear conocimiento "a la manera de Galileo". En particular, por analogía entre las metáforas de tiempo que éste pone en escena, quedan a su alcance incorporar a su acervo, una red de sentidos de "lo temporal" propio de la física experimental de los comienzos. Más adelante podrán "capturar lo temporal" de la física de la relatividad o de la física cuántica, en la construcción de nuevas leyes de covariación con el tiempo como una de sus variables. Y recurriendo al artilugio de las metáforas a la manera como configuramos ideas en la vida diaria, en nuestra cognición y también como sociedad, situados en diversas prácticas-con-vivencia.

Referencias y bibliografía

Álvarez Manilla, J. M., Valdés Krieg, E. & Curiel de Valdés, A. B. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 9, 9-33.

Álvarez, J. (2010). La música y el nacimiento del método. Revista Ciencias 100. UNAM: 20-26.

Álvarez, J. y Posadas, V. (2003). La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física *Revista Mexicana de Física* 49 (1) 61–73.

American Psychological Association. (2009). *Publication manual of the American Psychological Association*. (6th ed.) Washington, DC: American Psychological Association. Viadero, D. (2007, 19 de diciembre).

Carrasco, E., Díaz, L. y Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias Núm. 32.3: 365-384

Dear, P. (1985). Totius in verba. Rhetoric and Authority in the Early Royal Society. Isis 76, 145-161.

Díaz, L., Gutiérrez, E., Ávila, J. y Carrasco, E. (2007) Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos. Informe Final Fondecyt 1030413. En actas ENIN 2007. CPEIP-MINEDUC, Barrenechea, Chile.

Díaz, L. (2008). Matrices de sentido para las nociones de velocidad y tiempo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Pp. 878-887. Vol. 21. Ciudad de México.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 8 n° 2Pp. 145 – 168.

Drake, S. (1978). *Galileo at Works*. The University of Chicago Press. Chicago.

Drake, S. (1973).Galileo's discovery of the Law of Free Fall. *Scientific American* 228(5): 84-92.

Galilei, G. (1890-1909). *Le Opere di Galileo Galilei*, 20 vols., Edizione Nazionale a cura di A. Favaro. Florencia: Barbera.

Galilei, G. (1999). Notes on motion. Electronic representation of the manuscript. Disponible en http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Galileo_Prototype/MAIN/CONTENTS.HTM.

Naylor, R. H. (1974). Galileo and the Problem of Free Fall. *The British Journal for the History of Science* 7, 105-134.

Rose, P. L. (1975). The Italian renaissance of mathematics. Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo. Genève: LibrarieDroz, 1975.

Romo, J. (2005). ¿Hacía Galileo experimentos? *Theoria* 52: 5-23.

Solís, C. y Sellés, M. (2005). *Historia de la ciencia*. Madrid: Espasa Calpe.

Uso de carta histórica para abordagem da Teoria de Grafos no ensino médio

Lauro Chagas e **Sá**
Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil
lauro.sa@ifes.edu.br
Sandra Aparecida Fraga da **Silva**
Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil
sfraga@ifes.edu.br

Resumo

Apresentamos, neste trabalho, uma abordagem inicial da Teoria de Grafos em duas turmas de segundo ano de Ensino Médio. Propomos, por meio de carta, a resolução de um desafio que adapta o Problema das Sete Pontes de Königsberg (1736) à disposição geográfica da Grande Vitória (Espírito Santo, Brasil). Nosso objetivo é analisar respostas dos alunos à carta das Pontes de Vitória, de modo a estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e o do matemático Leonard Euler. Além da carta, foi utilizado um material didático próprio, elaborado à luz da Teoria do Jogo de Vozes e Ecos, de Paolo Boero e seu grupo. A partir da aplicação desse material, identificamos ecos produzidos por alunos durante a resolução das atividades propostas e apresentamos algumas contribuições do uso da História da Matemática em sala de aula.

Palavras chave: Educação Matemática, Matemática Discreta, Ensino Médio, Teoria de Grafos, História da Matemática.

Introdução

No Ensino Médio brasileiro, percebe-se que a Matemática Discreta tem se reduzido ao estudo de análise combinatória e probabilidade. Dessa forma, a inclusão dos Grafos no Ensino Médio permite a ampliação de discussões sobre os tópicos deste campo da matemática. Alguns aspectos normativos reforçam as potencialidades de se abordar a Matemática Discreta e a Teoria dos Grafos no Ensino Médio em sala de aula. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais defendem que "estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa [...] enfrentar problemas de diferentes naturezas" (Brasil, 2002, p. 9). Nesse sentido, estudar elementos da Matemática Discreta pode significar diversificação da Matemática para além dos elementos algébricos, tão marcantes em estudantes da Escola Básica. É importante destacar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem discussão do uso de problema da Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

> No Ensino Médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples

> entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler (Brasil, 2006, p. 94).

Na esfera estadual, o Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo prevê a "introdução à Teoria dos Grafos" (Espírito Santo, 2009, p. 120) para o segundo ano do Ensino Médio e "resolução de problemas utilizando grafos" (Espírito Santo, 2009, p. 122) para o terceiro ano. Além da justificativa da pesquisa em um caráter normativo, também foi nosso interesse conhecer as reais demandas de professores de matemática do Espírito Santo. Durante a fase inicial da pesquisa, tivemos a oportunidade de consultar noventa e quatro docentes para saber quais eram as demandas em relação à Teoria dos Grafos. Os resultados mostram que setenta e dois professores (76,59%) nunca estudaram Teoria de Grafos, oitenta e dois professores (87,23%) nunca trabalharam esse conteúdo em suas aulas e quarenta e nove professores (52,13%) sequer sabiam de sua presença no currículo. Podemos dizer, como Malta (2008, p.11), que "a Teoria dos Grafos apresenta aspectos pertinentes que merecem espaço no currículo da Escola Básica". Contudo, para que essa abordagem possa ser efetivada de forma adequada no Ensino Médio, é importante que os professores tenham conhecimento específico e pedagógico acerca do tema em questão.

Em face da necessidade de se buscar alternativas metodológicas para auxiliar o professor na abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, nosso trabalho investigou contribuições da História da Matemática no ensino deste tópico (Sá, 2014). Dessa forma, nosso objetivo da pesquisa citada foi identificar algumas das contribuições da História da Teoria de Grafos na abordagem inicial deste tema em uma turma de segundo ano de Ensino Médio. Para este trabalho, procuramos estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e o do matemático Leonard Euler, que criou a Teoria dos Grafos.

Fundamentação teórica

Acreditamos que a História da Matemática é uma rica fonte de experiências e produções humanas, que oportuniza um diálogo entre práticas atuais e fontes históricas, conforme previsto nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos e de conhecimento que vão entrar na relação didática (Brasil, 2006, p. 86).

Uma reflexão sobre a utilização da História na Educação Matemática nos conduz a uma escolha teórica. Os pontos de vista são variados e dependem da visão que cada professor e pesquisador têm da História e dos valores que estão presentes nesta metodologia. A primeira categorização referente ao uso de História da Matemática apresentada neste trabalho é proposta por Miguel e Miorim (2011). Estes autores organizam as investigações em: perspectiva evolucionista linear, perspectiva estrutural-construtivista operatória, perspectiva evolucionista descontínua, perspectiva sociocultural e perspectiva do Jogo de Vozes e Ecos. A perspectiva evolucionista linear recorre à História para identificar a ordem cronológica que os tópicos matemáticos surgiram e que, consequentemente, deverão ser ensinados. A perspectiva estrutural-construtivista operatória busca, na História, conflitos cognitivos que permitam a passagem de uma etapa de construção do pensamento para outra. Essa linha de pesquisa defende que os mecanismos de passagem de um período histórico são análogos aos da passagem de um estágio

genético aos seus sucessores (Piaget & Garcia, 1987). Segundo a perspectiva evolucionista descontínua, a História permite reconhecer obstáculos epistemológicos e construir situações problemas para superá-los. Baseada nas ideias de Vygostky, a perspectiva sociocultural enxerga a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas em atividades didáticas de Matemática. Também comungando das ideias vygostkyanas, a perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos (Boero, Pedemonte & Robotti, 1997) busca na História da Matemática relações "entre as vozes históricas produzidas na sistematização do discurso teórico da Matemática e as vozes dos estudantes" (Motta, 2006, p. 17).

A classificação que Motta (2006) faz em relação ao uso da História na Educação Matemática, a segunda a ser estudada, é influenciada pelas perspectivas levantadas por Miguel e Miorim (2011). Nesse sentido, a autora defende que as perspectivas evolucionista linear, estrutural-construtivista operatória e evolucionista descontínua constituem a imagem da História da Matemática como "espelho" enquanto as perspectivas sociocultural e do Jogo de Vozes e Ecos constituem a imagem como "pinturas". Essa divisão entre as perspectivas decorre da diferenciação entre

> [...] as que adotam um ponto de vista internalista e indutivista e que apresentam a Matemática como uma ciência pronta e acabada e aquelas que adotam uma visão externalista e sociocultural e buscam compreender o conhecimento matemático como uma manifestação significativa das diversas culturas (Motta, 2006, p. 18).

Em uma terceira categorização referente ao uso de História da Matemática, Dynnikov e Sad (2007) apresentam três opções para o emprego de fontes históricas em sala de aula: de modo factual, de modo processual e como fonte de significado. No primeiro caso, a História da Matemática é utilizada para dar mais veracidade, por meio de nomes, imagens e registros. Assim, essa metodologia se apresenta de modo ilustrativo e estático, na qual a única incumbência do professor é escolher o material e preparar a exposição. A segunda forma, mais dinâmica, percebe as fontes históricas como instrumentos que auxiliam no ensino de Matemática, pois permitem que o aluno conheça o processo realizado por um Matemático para a resolução de um problema. Nesse caso, ainda não há uma transposição da história para o contexto escolar e o papel professor é mediar e auxiliar nos registros. No terceiro modo de se utilizar de História em sala de aula, o papel das fontes históricas é produzir significados em meio às próprias experiências dos alunos, proporcionando, principalmente, uma ampliação da maneira com que eles entendem e lidam com a Matemática. Nesse caso, o professor precisa intensificar o dinamismo e os ecos produzidos pela voz dos autores nos alunos.

Ao longo das atividades realizadas em sala de aula realizada, nossa prática foi orientada pela Teoria do Jogo de Vozes e Ecos, elemento comum entre as perspectivas sociocultural e do jogo de Vozes de Miguel e Miorim (2011), a concepção de pintura de Motta (2006) e o terceiro modo de utilizar a história, de Dynnikov e Sad (2007).

Pressupostos metodológicos

Como pretendíamos abordar a história da Teoria dos Grafos e algumas de suas contribuições na abordagem inicial deste tema em sala de aula de uma turma de segundo ano de Ensino Médio, foi preciso desenvolver uma pesquisa qualitativa com duas frentes de trabalho: uma pesquisa histórico-bibliográfica e outra de prática de sala de aula. As atividades deste estudo iniciaram em abril de 2012 e foram realizadas até janeiro de 2014. Nos primeiros meses, nossa investigação foi realizada por meio da pesquisa de iniciação científica intitulada "Teoria dos Grafos em atividades didáticas desenvolvidas no laboratório de Matemática para o Ensino

Médio"[1], pela qual realizamos buscas por pesquisas que discutem a Teoria dos Grafos de acordo com várias tendências de Educação Matemática, como Resolução de Problemas, História da Matemática, Uso de Material Manipulativo e Modelagem Matemática. Os arquivos encontrados foram fichados, discutidos e retomados durante o planejamento de atividades e durante a escrita de trabalhos relacionados a cada tema em questão. Das tendências utilizadas, História da Matemática foi a escolhida para nortear essa pesquisa por atender aos objetivos propostos. Assim, realizamos um novo estudo bibliográfico, buscando elementos da história da Teoria dos Grafos, uma vez que o aspecto metodológico já havia sido delineado, inicialmente, com a leitura de Miguel (1997), Miguel e Miorim (2011) e Mendes (2009).

Um dos principais resultados pedagógicos do levantamento histórico diz respeito ao Problema das seis Pontes de Vitória. Durante a realização de um estudo piloto, percebemos as potencialidades desse problema para a abordagem de Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Nesse sentido, realizamos uma "adaptação pedagógica" (Mendes, 2009, p. 109), adequando o problema das pontes da capital capixaba à carta recebida por Euler.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707 – 1783) era o principal matemático da Academia de Ciências de São Petersburgo. Após tomar conhecimento da notoriedade de Euler, em 1736, o prefeito de uma cidade próxima a Königsberg enviou uma carta a Euler em nome de Heinrich Kiihn, um professor de matemática local. As mensagens trocadas inicialmente não foram recuperadas, mas uma carta datada de 09 de março indica que eles haviam discutido o problema. Assim, na atividade entregue para os alunos, substituímos o nome do prefeito pelo do pesquisador e o nome do professor Kihn pelo da professora orientadora (para o estudo piloto) ou pelo da professora regente da classe (na aplicação em sala de aula). A carta tem o papel de incentivar o empirismo e o raciocínio dedutivo, que são estratégias defendidas pelo Jogo de Vozes e de Ecos.

Preparamos duas outras atividades didáticas, que poderiam ser realizadas individualmente ou em duplas, a partir do planejamento realizado com a professora regente da turma. Ao elaborar atividades didáticas que fizessem uso de história da Teoria dos Grafos, procuramos retomar as ideias da Teoria do Jogo de Vozes e Ecos. Por isso, elaboramos um material que apresenta o que se acredita ser a estratégia adotada por Euler (1851) para resolver o Problema das Sete Pontes de Königsberg. Entretanto, para tornar o processo da sala de aula mais dinâmico, não apresentamos diretamente o modelo formulado pelo matemático suíço. Transformamos as estratégias de Euler em dicas para os alunos, deixando que eles elaborassem os diagramas e fizessem a contagem dos graus dos vértices, até chegar no Teorema da Existência de Caminhos Eulerianos. Optamos, o pesquisador, a orientadora e a professora regente, em entregar a carta como tarefa de casa, realizar a atividade da história em duas aulas (uma para resolução e outra para discussão) e reservar uma aula para a atividade avaliativa. Destacamos que, neste texto, voltamos nossos olhares para o primeiro momento da sequência, pois objetivamos estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e o do matemático Leonard Euler.

Implicações em sala de aula

No dia da entrega das cartas, ocasionalmente, não pudemos acompanhar a aula de matemática nas turmas de segundo ano. Dessa forma, as cartas foram entregues à professora

[1]Esta pesquisa foi financiada pelo Fundo de Apoio à Ciência e Tecnologia do Município de Vitória (Facitec).

regente para que ela repassasse aos seus alunos. Com as cartas produzidas, esperávamos que pelo menos um aluno apresentasse ideias presentes no Teorema da Existência do Caminho Euleriano para que esta carta fosse utilizada como disparador da primeira aula, quando se fosse discutir a solução de Euler. Nesse sentido, destacaríamos que a resolução do problema por um aluno de Ensino Médio não possui menor valor que a de um matemático.

No dia 27 de setembro de 2013, iniciei a aula recolhendo as cartas produzidas pelos alunos. Na Turma A, dos vinte e dois alunos em sala, cinco não entregaram o material. Em contrapartida, nenhum aluno da Turma B deixou de entregar a carta e nem a entregou em branco. As resoluções das cartas desses alunos foram classificadas na tabela 1, da seguinte forma:

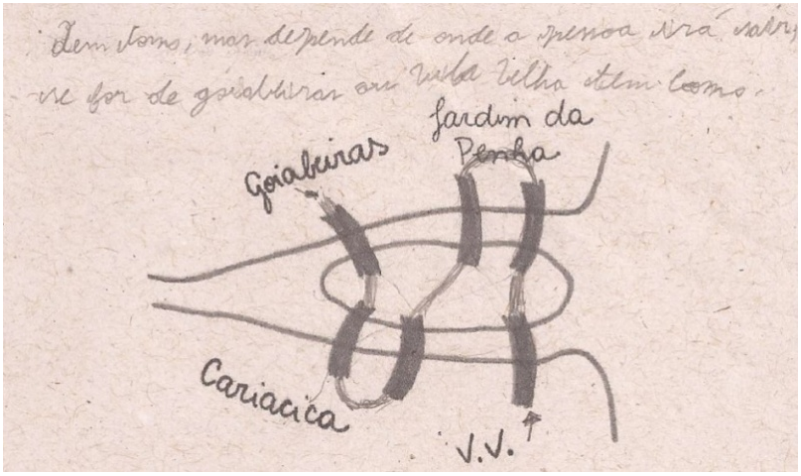
Tabela 1
Classificação das cartas produzidas pelos alunos

Critério de categorização da resolução	Quantidade de cartas recebidas	
	Turma A	Turma B
Em branco	4	0
Resposta incorreta; sem justificativa; sem solução alternativa para o problema.	6	2
Resposta incorreta; com justificativa; sem solução alternativa para o problema.	1	0
Resposta correta; sem justificativa; sem solução alternativa para o problema.	1	3
Resposta correta; sem justificativa; com solução alternativa para o problema.	5	13
Resposta correta; com justificativa; com solução alternativa para o problema.	0	1
Total	17	19

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador. 2014.

Os principais erros cometidos pelos alunos foram em decorrência da má interpretação do enunciado do problema ou da figura apresentada. Durante a resolução empírica, alguns alunos cometeram três tipos de erro:

i) Não procurou voltar ao ponto de partida (figura 1), o que indica que o aluno não se atentou para o questionamento sobre a possibilidade de se fazer o percurso e retornar ao ponto inicial. Nesse caso, o que ficou mais evidente para o aluno na carta é o fato de *"atravessar todas de tal forma que cada ponte seja atravessada apenas uma vez"*.

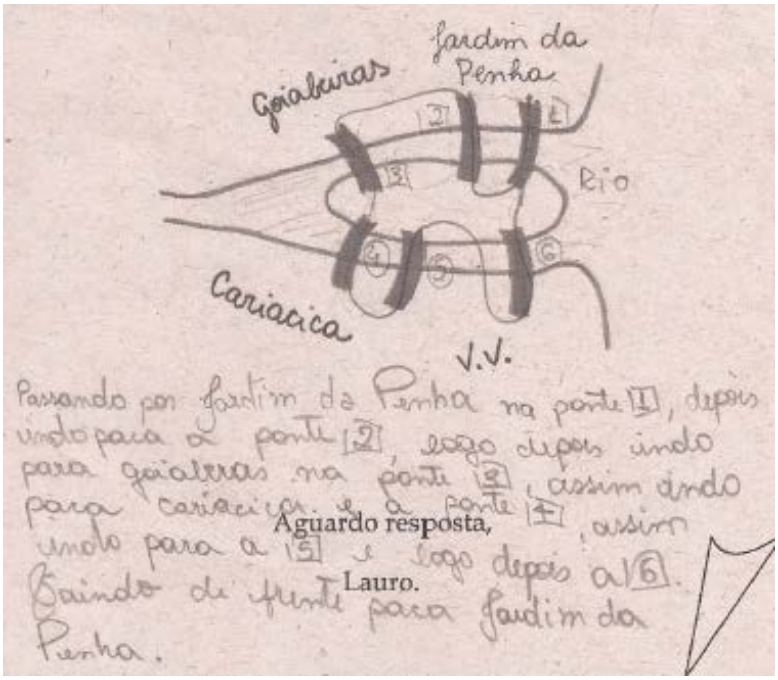


Transcrição do texto:

Tem como, mas depende de onde a pessoa irá sair; se for de Goiabeiras ou Vila Velha, tem como.

Figura 1. Resolução empírica de um aluno da Turma B, com erro do tipo I

ii) Passaram pela mesma ponte duas vezes (figura 2), o que indica que o aluno não se atentou para a orientação de cada ponte só deveria ser atravessada uma única vez. Em oposição ao erro relatado no caso anterior, verificamos que o aluno se atentou mais para o questionamento "*É possível fazer isso e voltar ao ponto de partida?*".



Transcrição do texto:

Passando por Jardim da Penha na ponte (1), depois indo para a ponte (2), logo depois indo para Goiabeiras na ponte (3), assim indo para Cariacica e a ponte (4), assim indo para a (5) e logo depois a (6). Saindo de frente para Jardim da Penha.

Figura 2. Resolução empírica de um aluno da Turma A, com erro do tipo II.

iii) Não respeitaram a delimitação das pontes (Figura 3), o que aponta para uma não atribuição de significado ao modelo matemático, de modo que o aluno não percebeu que, na prática, estaria indo de Vila Velha à Vitória sem nenhum meio físico especificado.

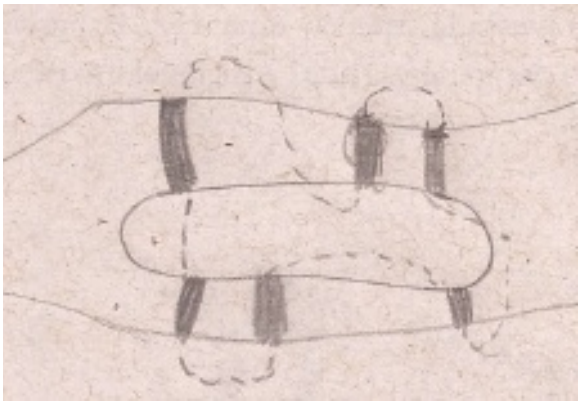


Figura 3. Resolução empírica de um aluno da Turma A, com erro tipo III.

Um erro que não se enquadra nas tipologias apresentadas, mas que nos chamou atenção, está apresentado na figura 4. Na resolução da carta, o aluno tentou estabelecer uma relação entre a quantidade de pontes e de regiões. Na tentativa de usar o quociente entre a quantidade de regiões e a de pontes como argumento, ele demonstrou compreender que a impossibilidade de percurso no mapa apresentado decorre da quantidade de pontes, o que já é uma solução do problema de Teoria dos Grafos.

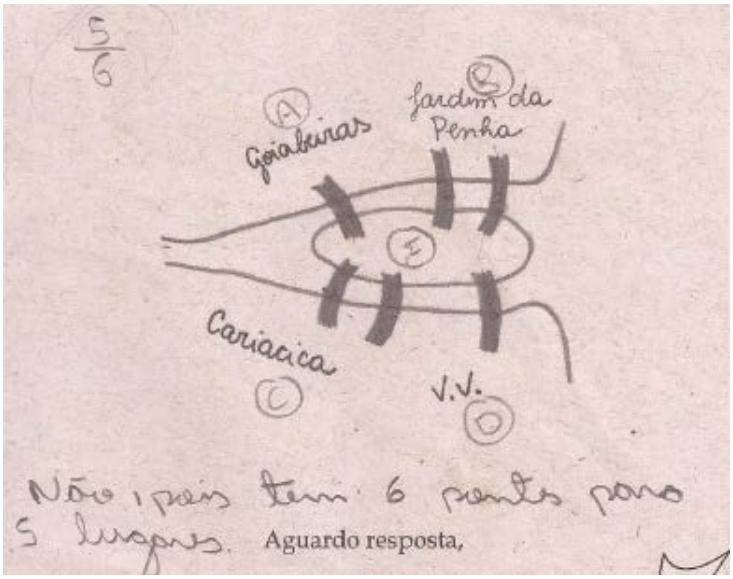


Figura 4. Resolução incorreta que apresenta rudimentos de Teoria dos Grafos.

Embora não tenham justificado sua resposta, alunos das duas turmas apresentaram uma alternativa de trajeto. Sabendo que não poderia ser realizado um percurso que passasse por todas as pontes e voltasse ao ponto de origem passando uma vez pelas pontes, os alunos comentaram que este percurso poderia ser realizado pela Rodovia do Contorno[2], como mostra a figura 5.

[2]A Rodovia do Contorno é o nome popular do trecho da BR-101 entre Carapina, na Serra – Espírito Santo/Brasil, e a interseção da BR-101 com a BR-262, em Cariacica – Espírito Santo/Brasil.

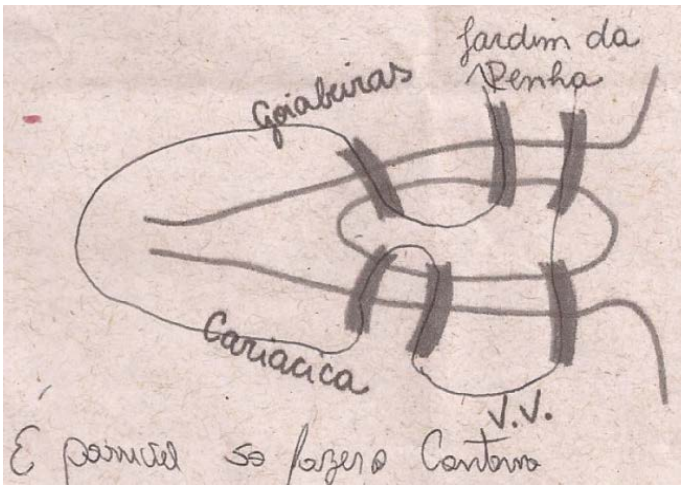
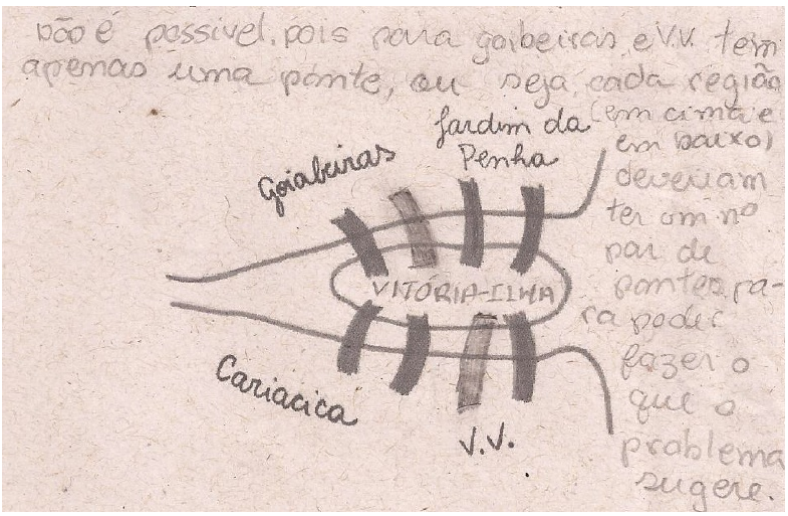


Figura 5. Solução alternativa apresentada pelos alunos.

Esta alternativa de trajeto já havia sido apresentada no estudo piloto, onde foi nos revelado que a Rodovia do Contorno atravessa o Rio Santa Maria da Vitória, como mostra a figura a seguir, e, portanto, pode ser considerada uma ponte.

Figura 6. Trecho da Rodovia do Contorno que atravessa o Rio Santa Maria da Vitória.

Apenas um dos alunos conseguiu elaborar um enunciado que justifica a inexistência do caminho solicitado pela professora Carla (figura 7). Ao dizer que "cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um número par de pontes", o aluno apresenta o Teorema dos Caminhos Eulerianos no seu discurso. Assim, como utilizamos esta resolução para discutir a criação da Teoria dos Grafos, inferimos que a utilização da carta adaptada possibilita emergir discussões sobre aspectos básicos e iniciais sobre Grafos.



Transcrição do texto:

Não é possível, pois para Goiabeiras e V.V. tem apenas uma ponte, ou seja, cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um nº par de pontes para poder fazer o que o problema sugere.

Figura 7. Resolução correta e com justificativa.

Analisando a resolução do aluno, percebemos que ao dizer que "cada região (em cima e em baixo) deveriam ter um número par de pontes", ele apresenta uma ideia do Teorema dos Caminhos Eulerianos no seu discurso.

Dando continuidade a aula, entregamos a atividade que narra o processo de construção da Teoria dos Grafos, por Euler[3]. Para leitura do texto e resolução das questões, os alunos se organizaram em duplas ou em trios, que foram designados pelos próprios alunos. Antes de iniciar a correção das atividades, retomamos algumas respostas das cartas produzidas pelos alunos para questioná-los sobre o nível de dificuldade do problema resolvido por Euler. Nesse momento, alunos de ambas as turmas comentaram que o problema não era difícil e que eles perceberam que a inexistência do caminho solicitado na carta decorria da quantidade ímpar de pontes de cada região do mapa. Ainda assim, eles julgaram que tal observação não era pertinente, pois não perceberam que esta seria uma justificativa aceitável para o problema. Nesse momento, destacamos que a História da Matemática também contribui para mostrar que o raciocínio dedutivo também tem importância na matemática. Após relacionar as respostas dos alunos com a resolução de Euler, demos continuidade à discussão das atividades e correção das questões.

Considerações finais

A partir do exposto, foi possível estabelecer relações entre estratégias de resolução de alunos e do matemático Euler. Verificamos que alguns alunos apresentaram rudimentos do Teorema da Existência do Caminho Euleriano e, além disso, um aluno enunciou o teorema durante a resolução do Problema das Pontes de Vitória. Com efeito, essas cartas foram utilizadas como disparador da discussão da solução de Euler. Na ocasião, formalizamos que se um grafo conexo tem mais de dois vértices com grau ímpar, então ele tem passeio euleriano. Com efeito, destacamos que (i) se um grafo conexo tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então ele possui um caminho euleriano aberto, que começa em um vértice, percorre todas as arestas e termina em um vértice diferente do inicial e que (ii) se um grafo conexo não tem vértices de grau ímpar, então ele tem um caminho euleriano fechado, que começa e termina no mesmo vértice, percorrendo todas as arestas.

[3] Disponível em Sá (2014).

Com essa experiência, entendemos que algumas contribuições da História da Matemática na abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio são de caráter cognitivo e social. Por caráter cognitivo, entendemos que os ecos produzidos pelos alunos durante a atividade proposta apontam para uma apropriação do conhecimento facilitado por meio do uso da História da Matemática. Por caráter social, destacamos que a perspectiva histórica nos permite mostrar que a matemática é uma ciência em contínuo desenvolvimento e que este processo é fruto de trabalho de diversas as pessoas.

Referências

Boero, P., Pedemonte, B., & Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a vygotskian perspective. In *PME CONFERENCE, 21nd*, Finlândia. *Anais eletrônicos...* Disponível em: <http://www.dm.unito.it/semdidattica/2011/app/boero21.pdf>. Acesso em: 21 out. 2013.

Brasil. Secretaria de Educação Básica. (2002). *PCN+ Ensino Médio*: *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, Brasil: MEC/SEF.

Brasil. (2006). *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília, Brasil: MEC/SEF, 2006.

Dynnikov, C. M. S. da S., & Sad, L. A. (2007). *Uma abordagem pedagógica para o uso de fontes originais em História da Matemática*. Guarapuava, Paraná, Brasil: SBHMat.

Espírito Santo. Secretaria da Educação. (2009). *Currículo Básico Escola Estadual - Ensino* médio: área de Ciências da Natureza. Vitória: SEDU, 2009. Disponível em: <http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual.pdf>. Acesso em: 06 out. 2012.

Euler, L. (1851). Solution d'um problème appartenant à la géométrie de situation, par Euler. *Nouvelles Annales de Mathématiques, 10,* 106-119 (Traduzido do Latim por E. Coupy).

Malta, G. H. S. (2008). *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). 158f. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Mendes, I. A. (2009). Atividades Históricas para o ensino de Trigonometria. In A Miguel, et. al (Eds.), *História da Matemática em Atividades Didáticas*. São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.

Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da história da matemática da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *ZETETIKÉ*, *5*(8), 73-105.

Miguel, A., & Miorim, M. A. (2011). *História na Educação Matemática: propostas e desafios.* Belo Horizonte, Brasil: Autêntica Editora.

Motta, C. D. V. B. (2006). *História da Matemática na Educação Matemática: espelho ou pintura?*. Santos, São Paulo, Brasil: Comunicar.

Piaget, J., & Garcia, R. (1987). *Psicogénese e história das ciências*. Lisboa, Portugal: Dom Quixote.

Sá, L. C. (2014). *História da Teoria dos Grafos e algumas contribuições no Ensino Médio* (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática). Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – Espírito Santo, Brasil.

Utilización maya de los grandes números

André **Cauty**
Association d'Ethnolinguistique Amérindienne (Villejuif)
Francia
acauty@free.fr

Resumen

Ético y educativo, nuestro objetivo es encontrar, en los textos precolombinos, los tesoros perdidos de la inteligencia aritmética maya, difundirlos y promover su riqueza para la Educación intercultural (Cauty, 1987). Interdisciplinario, el método hace interactuar el matemático, el epistemólogo, el lingüista y el epigrafista en cada fase de la investigación: recolección de los pasajes con números, desciframiento, análisis comparativa de los números mayas y mesoamericanos, traducción. Así, la aritmética se estudia haciendo hablar los autores indígenas que la crearon. El método muestra que los mayas, expertos contadores de la multiversalidad del tiempo, combinaban las caras ordinal y cardinal del número para formar cadenas de ecuaciones calendáricas integrando posiciones y fechas de una verdadera selva de ciclos. La estela 5 de Cobá muestra que un escriba podía escribir números con más de veinte cifras significativas y plantear, antes de Chuquet (1484), el problema de la extensión de la numeración de posición.

Palabras clave: etnomatemática, mesoamérica, aritmética maya, numeración, extensión de numeración, grandes números, calendario, material para la historia de los números y calendarios, temas para la educación.

Abstract

Ethics and Educative: Our goal is to find --in the pre-Columbian texts-- the lost treasures of Mayan Arithmetic Intelligence; popularize these treasures; and promote their wealth for Education worldwide. (Cauty, 1987). Interdisciplinary: Methods and context make the mathematician, the epistemologist, the linguist and the epigraphist interact at all investigative stages: collection of passages containing numbers; decipherment; comparative analysis of Mayan and Mesoamerican numbers; translation. Thus: Maya Arithmetic is studied by making speaking the indigenous authors who created it. The methods prove that the Mayans --peerless "counters" of the multiversality of time-- married the ordinal and cardinal faces of numbers; and formed chains of calendrical equations, combining positions and dates of a veritable forest of cycles. The Cobá Stela 5 proves that a scribe could write numbers to over twenty significant figures and pose the problem of extending the count position -- even before Chuquet's work in 1484--.

Resumo

Ético e educativo, nosso objetivo é encontrar, nos textos pré-colombianos, os tesouros perdidos da inteligência aritmética maia, divulga-los, e promover a sua riqueza para a Educação intercultural (Cauty, 1987). Interdisciplinar, o método faz inteatuar o matemático, o epistemólogo, o lingüista e o epígrafo em todas as fases da

investigaçao: coleção de passagens que contêm números, decifração, analisis comparativo dos números maias e mesoamericanos, tradução. Assim, a aritmética maya é estudada fazendo falar os autores indígenas que a criaram. O método continua a provar que os maias, expertos contadores da multiversalidade do tempo, combinavam os lados ordinal e cardinal do número para formar cadeias de equações calendáricas que integraban posições e datas de uma verdadeira floresta de ciclos. A estela 5 de Cobá mostra que um escriba podia escrever números de mais de vinte algarismos significativos, e colocar, antes Chuquet (1484), o problema da extensão da numeracão de posição.

Precisión, cifras significativas y grandes números

La precisión de un número y de una medida demanda muchas cifras. Muchas cifras denominadas significativas. La propiedad tener muchas cifras hace pensar, a veces equivocadamente, que la expresión numérica que las contiene remite a algo de grande. El saber que un elefante puede medir 4 metros a la cruz y pesar hasta 7 toneladas nos lleva a decir de modo espontáneo que es un animal muy grande. En sentido estricto, les expresiones 4 m o 7 t solamente prueban que los interlocutores son capaces de contar hasta 4 o 7: enteros que nadie cualificaría como grandes números. Signo de riqueza y abundancia, el contenido invisible de la bolsa con etiqueta '**3 pic**' de algo en una escena de recolección de tributos (vaso maya K5453, *in* Cauty, 2012: Fig. 43) prueba, por sí sola, la capacidad de los Mayas de contar hasta el número 3. En realidad, la propiedad tener muchas cifras traduce la calidad o la precisión de un proceso de recuento o de medida. En el caso de nuestro elefante, la utilización de los números con tan sólo una cifra (o incluso con dos o tres cifras) no implica ni que su tamaño sea conocido con una gran precisión (por ejemplo, con la precisión de un milímetro), ni que su masa sea igual a 7 millones de gramos y que se podría escribir de la siguiente forma: 7 000 000 g.

La propiedad tener muchas cifras no tiene que ver con el número de algo que debería ser grande, sino con algo que ha sido distinguido y definido de una forma tan precisa como una idealidad matemática[1]. Los más antiguos ejemplos provienen de Babilonia o de Egipto y remontan al 2º milenio A.C. He aquí un ejemplo babilónico. Conservada en Yale, la tablilla YBC 7289 (Fig. 1) muestra un cuadrado de lado un medio (½) y sus diagonales. Dos números están asociados a una de las diagonales. Los especialistas estiman que el irracional que expresamos como √2 era entonces representado por un número sexagesimal con 4 cifras significativas: **1** × 60^0 + **24** × 60^{-1} + **51** × 60^{-2} + **10** × 60^{-3} o sea √2 ≈ 1,414213 (decimal)[2].

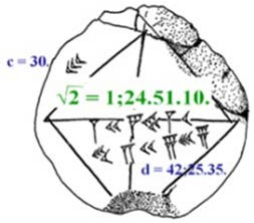


Figura 1. d/c = **1;24.51.10.** = 2 × **42;25.35** = 1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000 ≈ √**2**

[1] La relación de la diagonal *d* al lado *c* del cuadrado (irracional √2 = *d*/*c*) o de la circunferencia C con el radio R del círculo (real π = C/R) son, por ejemplo, números cuya escritura decimal exige una infinidad de decimales.

[2] Para más detalles, http://www.hps.cam. ac.uk/people/robson/fowler-square.pdf

Sin grandes números, no hay una verdadera precisión en las cuentas o mediciones. Veamos los siguientes: definición, criterio y ejemplos[3]:

Definición. Sea *n* un entero natural. Digo que *n* es un gran número ssi (si y solamente si) su descomposición según las potencias de la (/o de las) base(/s) en uso[4] comprende varios constituyentes o cifras significativas; en otras palabras, la escritura polinomial $\Sigma_i (\mathbf{c}_i \times \mathbf{N}^i)$ de un gran número presenta varios monomios[5].

Criterio. Digo que una sociedad utiliza grandes números cuando se ha probado que sus miembros son capaces de expresar todos los enteros, hasta el menor de aquellos que podemos calificar como grandes números. Para ello por lo menos hay que presentar uno o algunos números cuya expresión contenga varias cifras significativas[6].

Ejemplos: las series iniciales de los Mesoamericanos**.** Las series iniciales (SI) aparecen en el primer siglo A.C. en la región del istmo de Tehuantepec. Se trata de un método de datación absoluta denominado Cuenta Larga**,** que consiste en contar y numerar los días pasados (hacia el futuro o el pasado) desde un día de origen, el día **α**/**ω**. Una de las grandes ventajas del método es permitir calcular el periodo que separa dos fechas determinadas por medio de una simple resta, o encontrar la imagen de una fecha por medio de una traslación haciendo una simple suma. La Cuenta larga (y números de distancia) permiten solucionar o controlar con la precisión de un día los problemas de cómputo que los escribas mayas se planteaban.

La más antigua serie descubierta hasta hoy en Mesoamérica proviene de Chiapas, una región de México ocupada en su mayor parte por pueblos de cultura olmeca; ella data de una época en que había estrechos contactos entre los Mayas y los Epi-olmecas. Grabada en una placa denominada Estrela 2 de Chiapa de Corzo, la más antigua serie posee cinco cifras significativas: [**7**]**.**[**16**]**.3;2.13.** (las dos primeras reconstruidas) y una fecha deteriorada (en el calendario de la semana adivinatoria de 260 días): **6 [?].**

[3] La definición y el criterio dicen que no basta mostrar algo enorme para demostrar la utilización de los grandes números. Algo enorme, como la edad del universo, por ejemplo, raramente se expresa con una gran precisión: (cerca de) 15 mil millones de años. La expresión decimal 1 miríada 6 millares [sin centenar] 9 decenas [sin unidad], y las expresiones mayas **8-baktun 16-katun 0-tun** ; **0-uinal 0-kin** (Uaxactún) y **17.0.1;3.0.** (Xultún) serían pruebas consideradas suficientes de la utilización de números de 5 cifras significativas (la primera en numeración decimal y las ultimas en numeración vigesimal).

[4] Para mencionar tan sólo un ejemplo, a menudo se habla del tiempo por medio de patrones numerosos, diversos e irregulares: milenio, siglo, año, mes, día, hora, minuto, segundo... Por consiguiente, la definición debe tener en cuenta no sólo los sistemas que generan polinomios a una variable, sino también a dos o más.

[5] Todavía hay que establecer el valor numérico de este varios.

[6] A menudo conocido o deducible de un corpus de números, el valor *máximo* de varios da una idea de la capacidad práctica de la numeración de una determinada sociedad. Los aztecas contaban en unidades (sē), en nudos de 20 (sem-pōwal-li, *score*, en inglés), en nudos de 400 (sen-con-λi) y en nudos de 8 000 (sen-šikipil-li), o sea, 4 "cifras aztecas". Repetitivo-aditivo, su sistema de numeración permite escribir enteros con cuatro cifras significativas, pero no encontré ningún ejemplo de ello. Deducimos: a) que la numeración tenía una capacidad de 160 000, y b) que los aztecas no dejaron ejemplos de grandes números (según la definición y el criterio propuestos).

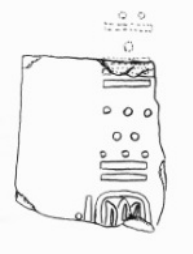


Figura 2. La **SI 7.16.3;2.13. 6 [?].** de la estela 2 de Chiapa de Corzo (Chiapas, México)

Las series iniciales (SI) más numerosas y mejor comprendidas en la actualidad son todas mayas y de la época clásica (siglos III a X). Las **SI** del Clásico maya son expresiones de cinco cifras significativas y dos indeterminadas: **tun** (año de 360 j), y **kin** (día)[7]. Si suponemos que el autor de la serie **7.16.3;2.13.** utilizaba las herramientas y las reglas conocidas para descifrar las series mayas[8], entonces la estela 2 de Chiapa de Corzo designaría un día **6 Ben** del año 36 a.C., correspondiente al 07/12/-35 (gregoriano).

En la definición y el criterio, el valor de varios debe ser aclarado caso a caso en las sociedades, ya que importantes propiedades de las expresiones numéricas dependen del tipo de numeración, en particular del tamaño de la base de los sistemas (numeraciones, medidas o algoritmos) realmente en uso. Poseer varias cifras en base dos y varias cifras en base sesenta o en base millón no tiene los mismos significados ni las mismas consecuencias; tales propiedades condicionan a la vez la economía de los intercambios numéricos y la dinámica de la evolución de los sistemas. En numeración de posición, por ejemplo, el tamaño del vocabulario terminal es proporcional al de la base, y ello significa que para utilizar una base millón, hay que poder distinguir y escribir un millón de cifras. Por otra parte, el número de cifras necesarias para escribir un determinado entero disminuye con el tamaño de la base ; así, por ejemplo, cincuenta y nueve es: un número de una cifra (**59.**) en base sesenta (o más), pero un número con dos cifras en base veinte (**2.19.**) o en base diez (**5.9.**), y un número de seis cifras (**1.1.1.0.1.1.**) en base dos ; sin olvidar que su expresión repetitiva exigiría cincuenta y nueve marcas (entalles, trazos, puntos u otros signos). En otras palabras, el número de cifras necesarias para expresar un entero es mayor cuando la base es menor; por lo tanto, el costo de comunicación de los enteros disminuye cuando la base aumenta. Sin embargo, en contrapartida, une base menor reduce el número total de las cifras a memorizar, así como el costo de aprendizaje de la numeración y de las tablas de cálculo. Cada sociedad equilibra ventajas e inconvenientes de acuerdo con su conveniencia.

Para estimar el valor de varios debemos observar: a) que los humanos utilizan bases del orden de una o algunas decenas: diez en casi todas partes, veinte en Mesoamérica, sesenta en la Mesopotamia, y b) que sus capacidades cognitivas llevan sus sociedades a utilizar sistemas generalmente basados en los divisores de los números diez (1, 2, 5 y 10) y/o doce (1, 2, 3, 4, 5, 6

[7] En estas condiciones, la transcripción de una determinada serie inicial maya en numeración de posición (como las primeras SI) asume la forma $\mathbf{c_4\ c_3\ c_2\ ;\ c_1\ c_0}$, en la cual el punto y coma separa la cuenta de los **tun** y la de los **kin**.

[8] A saber: a) un sistema vigesimal de unidades de tiempo con la misma única irregularidad (1 año de 18 meses de 20 días), b) el mismo día de origen (0.0.0;0.0. **4 Ahau *8 Cumku***), y c) la concordancia GMT (que en la actualidad es la más admitida) y la constante de correlación 584 284 para traducir las Cuentas largas mayas en fechas del calendario gregoriano proléptico. Según estas hipótesis, el día cero es el 12/08/-3113, y la fecha **6 X** de la estela 2 de Chiapa de Corzo sería equivalente al **6 Ben** [***16 Xul***] del Calendario Ritual maya. Tales fechas son consideradas confiables a ± 1 día.

y 12)[9]. Por consiguiente, admitiremos *a priori* que un gran número debe comprender varias cifras cuando se descompone según las potencias de una base del orden de diez o de algunas decenas. En base veinte (respectivamente sesenta), por ejemplo, el "gran mil" es superado por números de cinco (respectivamente cuatro) cifras significativas.

En numeración vigesimal, un número será denominado gran número siempre que su expresión demande por lo menos cinco cifras significativas. Este valor *a priori* del varios de la definición y del criterio es validado *a posteriori* por las series iniciales mesoamericanas como la de la placa de Leyde (Fig. 3) que, por otro lado, presenta el primer cero (ordinal) del calendario maya del año común (*ha'ab*) de 365 días (la fecha ***0 Yaxkin***). De este modo, el criterio otorga la utilización de los grandes números a algunos mesoamericanos, en particular a los mayas del Clásico, y la niega a otros[10], especialmente a los aztecas.

¿Por qué los aztecas? Por un lado, porque sus escribas no dejaron ninguna serie inicial y por otro, porque sus documentos contables (listas de tributos o de sacrificios, censos de la población) presentan números redondos o números con menos de 4 cifras significativas[11]; el escriba del códice Telleriano Remensis, por ejemplo, escribió el número veinte mil repitiendo dos veces el signo 8 000 y diez veces el signo 400. En otra forma, 20 000 se presenta como un entero vigesimal con dos cifras, las cifras 'dos' y 'diez' (20 000 = **2** × 20^3 + **10** × 20^2).

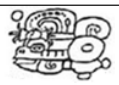
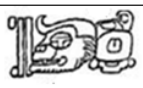
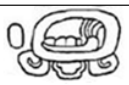
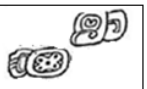
							
Contemos por **Yaxkin** los **tun**	**8-baktun** [(8 × 400) + 3 200 +	**14-katun** (14 × 20) + 280 +	**3-tun** 3 × 1] ; 3 = 3 483 'años' ;	**1-uinal** [(1 × 20) + 20 +	**12-kin** (12 × 1)] 12 = 32 'días'	**1 Eb**	***0 Yaxkin***

*Figura 3***.** La SI **8.14.3;1.12.** (= 1 253 912 días) conduce a la fecha **1 Eb *0 Yaxkin***

Figura 4. Escritura de veinte mil en numeración escrita azteca (tipo aditivo).

Nota. En sintaxis de las numeraciones de posición, denomino profundidad sintáctica de una expresión numérica su número de cifras (/o de monomios). Luego, en numeración decimal, por ejemplo, siete es la profundidad sintáctica de millón (por escrito colocamos una cifra uno seguida de seis cifras cero), y, entre os Mesoamericanos, un gran número es un número de

[9] Quizás porque estos valores remiten a la anatomía de las manos: 5 dedos, de los cuales 4 de 3 falanges accesibles por el pulgar, y cuyas anchuras verifican: 3 pulgares = 4 dedos = 1 palma.

[10] Las fuentes históricas presentan muchas series mayas, algunas series olmecas, pero no series zapotecas, mixtecas o aztecas. Deducimos que, rápidamente después de los olmecas, los mayas se convirtieron en los principales, o incluso en los únicos utilizadores mesoamericanos de grandes números; de los grandes números que representaban durante toda la época clásica periodos que se expresaban en **tun** y **kin**.

[11] Así como la numeración egipcia (/romana), pero en lógica vigesimal, la numeración azteca repite los nudos $\mathbf{N^0 = 20^0}$, $\mathbf{N^1 = 20^1}$, $\mathbf{N^2 = 20^2}$ et $\mathbf{N^3 = 20^3}$ presentados en la nota 6, son las cuatro 'cifras aztecas'. El ocho millar (sen-šikipil-li) es el nudo último y mayor. Por lo tanto, el mayor número que un azteca puede escribir es **19.19.19.19.** Imposible transcribir una serie inicial maya, como la de la placa de Leyde, que comienza por $\mathbf{c_4 = 8}$ (coeficiente de **baktun**): ella sobrepasa un millón (8 × 144 000) y *a fortiori* el límite **19.19.19.19.** del sistema azteca.

profundidad sintáctica igual o superior a cinco. Muy a menudo las sociedades internalizaron los subsistemas (que yo denomino morfologías) que habían servido para producir la expresión de los primeros enteros (las cifras del sistema, cuando de ello se trata) y la de los nudos de la numeración o la de las unidades de medida. Esas formas morfológicas permiten reconocer de inmediato una cantidad (*subitizing*). Resulta de ello que la longitud morfológica de las expresiones es mayor que su profundidad sintáctica[12]. Entre los mayas, por ejemplo, las cifras ordinarias no nulas son formadas por repetición del punto (valor numérico uno) y de la barra (valor número cinco) o por composición aditiva de estos dos tipos de bloques repetitivos; del mismo modo, en idioma yucateco, la expresión hablada de los enteros de **ox-<u>lahun</u>** 'trece' a **bolon-<u>lahun</u>** 'diecinueve' está compuesta con el número de apoyo aditivo **<u>lahun</u>** 'diez'. Según tales definiciones, cincuenta y nueve es un número de profundidad sintáctica dos en numeración vigesimal (su escritura yuxtapone dos cifras que se trascriben **2.19.**), y de longitud morfológica nueve en numeración escrita (en realidad se necesitan dos puntos para escribir **2.** y después tres barras y cuatro puntos para escribir **19.**); su expresión hablada, //**bolon/lahun/ti/uy/ox/kal//** en yucateco colonial, comprende un relator (//**ti/uy//**) y cuatro argumentos numéricos (**bolon** 'nueve', **lahun** 'diez', **ox** 'tres' y **kal** 'veinte'), es decir, una longitud morfológica de cuatro (o cinco, contando el relator). En numeración escrita azteca, el mismo número cincuenta y nueve también es de profundidad sintáctica dos, pero es de longitud morfológica veintiuno: para escribirlo hay que concatenar dos signos veinte y diecinueve signos uno. El lector notará que la longitud morfológica de una expresión no es el mejor criterio para decidir desde un punto de vista cognitivo si ella remite o no a un gran número. Fin de la nota.

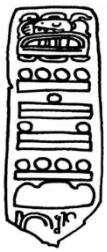
Como vimos, la utilización incontestable de los grandes números remonta a las series iniciales certificadas del siglo I A.C. al siglo II D.C. por diversos ejemplos mesoamericanos[13] de cadenas de cinco cifras $(\mathbf{c_i})_i$, o, más tarde, a partir del siglo II D.C. y tan sólo entre los mayas, de cinco monomios $\square_i (\mathbf{c_i} \times \underline{\mathbf{P_i}})$[14]. He aquí algunos ejemplos de números escritos como cadenas de cifras de estilo puntos/barras (numeración de posición con cero, Fig. 5 a, b, c) o de cadenas de monomios (numeración de disposición con cero, Fig. 5 d):

[12] En numeraciones habladas, la longitud morfológica se puede definir como su número de elementos de primera articulación (su número de constituyentes numéricos). Se distinguen así los compuestos transparentes para todos los hablantes (como dix-sept y quatre-vingts en francés), de los que no lo son para todos (como onze, douze, etc., seize**,** y trente**,** quarante, etc.), y de los que ya no lo son, excepto para algún experto en historia de las lenguas (como huit**,** cuya **t** final es el vestigio de un sufijo indoeuropeo de dual (número gramatical para pares) que modifica una raíz (palma de la mano) que remite a cuatro.

[13] Además de Chiapa de Corzo: Monumento C de Tres Zapotes (**7.16.6;16.18.** = 02/09/-31), Estela 2 de El Baúl (03/03/37), Estela 5 de Takalik Abaj (**8.4.5;7.11.** = 16/11/125), Estela 1 de La Mojarra (**8.5.3;3.5.** = 20/05/143 y **8.5.16;.9.7.** = 12/07/156), y Estatuilla de Tuxtlá (**8.6.2;4.17.** = 13/03/162).

[14] Estas escrituras presuponen la invención de un sistema de medición de tiempo, y la noción/notación del 'cero cardinal'. Entre los mayas, el cero es certificado en el siglo IV (como 'cero cardinal' por las estelas 18/19 de Uaxactún del 03/02/357, y como 'cero ordinal' por la placa de Leyde del 16/09/320). Los 5 glifos de periodo son certificados al final del siglo III por la estela 29 de Tikal (07/07/292), o incluso en el siglo II por los signos **<u>baktun</u>** y **<u>katun</u>** de la placa de Dumbarton Oaks (15/07/120).

a) El Baúl (Chiapas, México



b) Pestac (Chiapas)

c) Códice de Dresde

d) Uaxactún (Petén, Guatemala)

Figura 5. Escritura maya de los números en numeración de posición y de disposición

Los periodos de la Fig. 5 se leen respectivamente: a) **7.19.15;7.12.** (3195 **tun** 'años' y 152 **kin** 'días'), b) **9.11.12;9.0.** (3832 **tun** 'años' y 180 **kin** 'días'), c) **[5.5.];8.0. (**105 **tun** 'años' y 160 **kin** 'días' o V_{13} = 13 × 2 920), **1.5.14;4.0.** (514 **tun** 'años' y 80 **kin** 'días' o X_4 = 712 × 260), **9.11;7.0.**, (191 **tun** 'años' y 140 **kin** 'días' o X_3 = 265 × 260), **4.12;8.0.** (92 **tun** 'años' y 160 **kin** 'días' o X_2 = 128 × 260), **1.5;5.0.** (25 **tun** 'años' y 100 **kin** 'días' o X_1 = 35 × 260), **4.17;6.0.** (97 **tun** 'años' y 120 **kin** 'días' o V_{12} = 12 × 2 920), y d) **8-baktun 16-katun 0-tun ; 0-uinal 0-kin** (d = [(**8** × **20**^{2}) + (**16** × **20**^{1}) + **0**] **tun** 'años') ; y [(**0** × **20**^{1}) + **0**] **kin** 'días' o 3 520 años y 0 día, o aún d = [(**8** × **144 000**) + (**16** × **7 200**) + (**0** × **360**) + (**0** × **20**) + **0**] **kin** 'días' o sea 1 267 200 días.

Según la opinión unánime de los eruditos, estas cadenas representaban el tempo (contado en número entero de días) que había pasado desde un día (/una fecha) que se establecía como origen. Además, ellas estaban combinadas con los calendarios, comenzando por el calendario de la semana adivinatoria de 260 días, como lo muestra, por ejemplo, la estela 2 de Chiapa de Corzo (Fig. 2).

En el Clásico y en el Postclásico, los mayas hicieron todavía más en este sentido. La mayoría de sus monumentos, los muros de Xultún (Petén, Guatemala) o los códices de Dresde y de París presentan por lo menos una serie inicial o un número de distancia de 5 cifras significativas (a veces más), y esta serie se combina con los calendarios de una enorme cantidad de ciclos de todos los tipos. Una serie inicial maya siempre es el primer miembro de una igualdad que traduce la cuenta $\square$ ($\mathbf{c_i} \times \mathbf{P_i}$) en fechas de diferentes calendarios y en posiciones de distintos ciclos. Ella contiene por lo menos el núcleo[15] $\square$ ($\mathbf{c_i} \times \mathbf{P_i}$) = $\square X \diagup\!\square Y$ en que $\square X$ es la fecha en el calendario *tzolkin* (260 fechas) y $\diagup\!\square Y$ la fecha en el calendario *ha'ab* (365 fechas) del día numerado por la serie. Gracias a estos datos, les eruditos pudieron establecer y verificar que el conteo de los días se efectuaba a partir del día con fecha **0.0.0;0.0.** (/o **13.0.0;0.0.**) **4 Ahau *8 Cumku*** G_9 que corresponde al primer/último día del ciclo de trece baktun, y al 12/08/-3113 del calendario gregoriano. Tomemos como ejemplo la estela 3 de Piedras Negras (Petén, Guatemala).

[15] A menudo el escriba añadía la posición en otros ciclos (novena, lunación, año lunar, ciclo del ídolo Kauil, fases de Venus, etc.). De cualquier forma, la primera frase del relato maya es un enunciado heterogéneo (Cauty, 2012: 102-103), con por lo menos una Cuenta larga y una fecha (**αX**, ***βY***).

	Traducción del GI *Son contados, para* **Yaxkin**, *los* **katun**		
	9-baktun	**9 × 20^2 = 3 600 tun**	**9 × 144 000 = 1 296 000 kin**
	12-katun	**12 × 20^1 = 240 tun**	**12 × 7 200 = 86 400 kin**
	2-tun ;	**2 × 20^0 = 2 tun** ;	**2 × 360 = 720 kin**
	0-uinal	**0 × 20^1 = 0 kin**	**0 × 20^1 = 0 kin**
	16-kin	**16 × 20^0 = 16 kin**	**16 × 20^0 = 16 kin**
	Traducción de la SI *3 842 años y 16 días* o *1 383 136 días*		
	t_0 = 5 Cib *14 Yaxkin* = 9.12.2;0.16.		

Figura 6 : Descifrar la primera igualdad calendárica de la estela 3 de Piedras Negras.

Como todos los textos mayas monumentales redactados según las reglas del arte, esta estela marca el tiempo al insertar una cadena de ecuaciones calendáricas en el propio cuerpo del texto. Examinemos la primera ecuación.

La estela comienza con un glifo introductorio (GI) que comprende un verbo (contar cuantidades y/o historias), un nombre **Y** de mes, y una unidad de tiempo (**tun** o **katun**). Se trata del primer eslabón, el punto del cual parte a la vez el relato y el conteo de los días. *Jano Bifronte*, cardinal/ordinal, la cuenta se lee como un periodo o como una fecha. Como fecha, la serie numera el día en que se está, y como periodo, la distancia en lo que concierne a la origen **α/ω**. El escriba traduce *illico* el número de la serie en fechas de los calendarios usuales, fechas más parlantes que un simple número, y da por lo menos la fecha **α*X* *β*Y*** vinculada al producto CR = *tzolkin* ⊗ *ha'ab* del calendario adivinatorio y del calendario anual. El par así obtenido (CL = CR) se convierte en el instante $\mathbf{t}_0$ del relato. Sobre la estela de Piedras Negras, el texto en glifos establece que $\mathbf{t}_0$ fue el día del nacimiento de la reina.

La primera ecuación calendárica de Piedras Negras dice precisamente que el **1 383 136º** día después del origen fue un **5 Cib *14 Yaxkin*** (06/07/674). He aquí algunas traducciones que expresan los periodos de la manera maya, en **tun** y **kin** 'años y días' o en **kin** 'días':

9.12.2-<u>tun</u> ; 0.16.-<u>kin</u> = 5 Cib *14 Yaxkin*

9-<u>baktun</u> 12-<u>katun</u> 2-<u>tun</u> ; 0-<u>uinal</u> 16-<u>kin</u> = 5 Cib *14 Yaxkin*

4 Ahau *8 Cumku* + 9.12.2;0.16. = 5 Cib *14 Yaxkin*

[0.0.0;0.0.] + 9.12.2;0.16. = 9.12.2;0.16.

Mayas o no, las más antiguas series iniciales empiezan por la cifra $\mathbf{c_4} = 7$, las más numerosas pela cifra $\mathbf{c_4} = 9$, y las últimas por la cifra 10. Ello muestra que los grandes números mesoamericanos son, como la serie de la estela 2 de Chiapa de Corzo y todas las series iniciales mayas de la época clásica, enteros que superan el millón de días. Un entero frecuentemente visto como grande[16], y que sobrepasa la capacidad generativa de las numeraciones de un gran número de sociedades de la Antigüedad mesoamericana. En particular, éste es el caso de las sociedades que no utilizaban la Cuenta larga. Según Edmonson (2000:43), el uso de esta herramienta de datación absoluta fue establecido para la mitad Este de Mesoamérica, pero no se ha probado en la mitad Oeste (Fig. 7).

Figura 7. Distribución de la Cuenta larga (parte Este de la Mesoamérica)

Los muy grandes números mayas

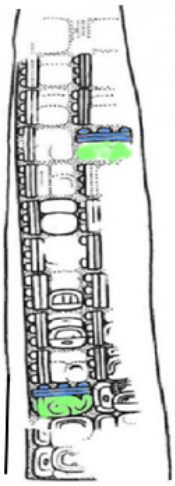
Sin que sepamos exactamente cuál es el motivo de ello, algunas sociedades eruditas[17] empezaron a buscar grandes números. En Mesoamérica, ello fue lo que sucedió en el caso de los mayas de Cobá (Quintana Roo, México). Varias estelas de esta ciudad prueban que ellos habían descubierto el medio de producir números arbitrariamente grandes, no agregando ceros al final de la escritura de un periodo, sino añadiendo 13. al inicio.

La estela 1 presenta la expresión habitual del día **α/ω**, **13.0.0;0.0. 4 Ahau *8 Cumku***[18], pero aquí es precedida por un conjunto de 17 monomios $\mathbf{c_j\underline{P_j}}$ con coeficiente $\mathbf{c_j} = \mathbf{13.}$. Ello nos da un número de la forma "**13.13.** […] **13.** $\mathbf{c_4\ c_3\ c_2}$ **;** $\mathbf{c_1\ c_0}$" (un número gigantesco, con más de veinte

[16] Según el *Trésor de la Langue Française* (http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/advanced.exe?8;s=1504072620), la palabra millón (mil veces mil) designa « *un número muy grande* ».
[17] Guitel (1975:555) ofrece el ejemplo de India y cita la « *numeración que penetra hasta el polvo de los átomos* » y que permite escribir el número de las revoluciones de la Luna (57 753 336) en el trascurso de un *yuga* (4 320 000 años solares). En numeración de Aryabhata de base cien, las cinco cifras de este número, **36.33.75.57.**, son transcritas con la ayuda de sílabas, Consonante + Vocal, del silabario sánscrito.
[18] La serie **1.11.19.9.3.11;2.0.** (estela 10, Tikal) dice que **13.0.0;0.0.** no es el fin del mundo ni del CL.

cifras en base veinte). Estos gigantes poseen una propiedad que cabe como un guante en las manos de un adivino que lee el invisible (futuro, o no): como el sistema de los periodos es vigesimal, cada 13 añadido frente a una unidad superior al **tun** (c_2) es coeficiente de un múltiplo de 20. Agregar 13 frente a una serie es lo mismo que añadir múltiplos de 260, y esto no modifica la fecha **αX** de las ecuaciones calendáricas (**13**) Σ_i ($c_i \times P_i$) = **αX** βY. Conservar el día **αX** legitima la transferencia de los pronósticos del día **c_4-baktun c_3-katun c_2-tun ; c_1-uinal c_0-kin αX** [βY] a todos los días **13-[?] 13-[?] … 13-[?] c_4-baktun c_3-katun c_2-tun ; c_1-uinal c_0-kin αX** [$\beta' Y'$].

La estela 5 de Cobá (Fig. 8) presenta además una singular innovación. Al contrario de los demás, el coeficiente de P_4 = **13-baktun** y, trece casillas arriba, el de P_{17} = **13-**(20^{13} × **baktun**) están en la horizontal. De repente, llaman la atención sobre los tramos de trece monomios consecutivos. Este detalle tipográfico reserva una sorpresa.



ligne	Stèle 5 de Cobá	
13	P_{24}	P_{23}
12	P_{22}	P_{21}
11	P_{20}	P_{19}
10	P_{18}	P_{17} (20^{13} baktun)
9	P_{16}	P_{15}
8	P_{14}	P_{13}
7	P_{12}	P_{11}
6	P_{10}	P_9
5	P_8	P_7
4	P_6	P_5
3	P_4 (20^0 baktun)	P_3 (katun)
2	P_2 (tun) ;	P_1 (uinal)
1	P_0 (kin)	4 Ahau

Figura 8. Cambio de orientación del coeficiente del signo de periodo (Estela 5 de Cobá)

Para un historiador de numeraciones, esta innovación gráfica remite a los esfuerzos de los matemáticos de diversas épocas que intentaban extender la capacidad de una numeración que pierde impulso. El estudio de las soluciones del problema de las extensiones de las numeraciones (Cauty, 1987) me lleva actualmente a comparar el detalle tipográfico de Cobá con la separación de un número decimal en trozos de seis (/o tres) cifras. Debemos esta práctica a Nicolas Chuquet (1484), que transformó la numeración de posición de base diez en una numeración de posición de base millón. Leamos la definición de Chuquet notando que ella termina con una apertura al infinito: "*y así de los otros*".

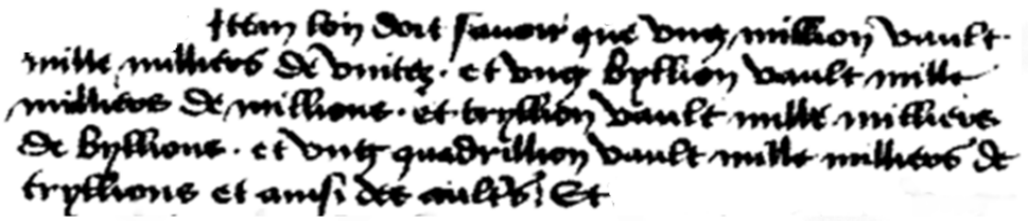


Figura 9 .De la misma manera se debe saber que un millón es igual a mil millares de unidades, y un billón vale mil millares de millones, y un trillón vale mil millares de billones y un cuadrilón vale mil millares de trillones y así de los otros.

Veamos el ejemplo que él daba para enunciar en francés y escribir en numeración extensa (base millón) un número de 24 cifras significativas en numeración decimal[19] :

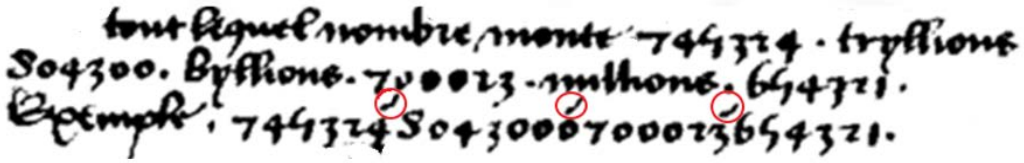


Figura 10. aquel número sube a 745324. trillón 804300. billón 700023. millón. 654321. Ejemplo: 745324'8043000'700023' 654321.

He postulado (*Vestiges des recherches arithmétiques mayas*, inédito) que la separación en trozos de 13 monomios de las series de Cobá podría haber jugado el mismo rol que la de Chuquet en trozos de 6 cifras, es decir: extender una numeración posicional existente potenciando el tamaño de su base, y al hacerlo, transformar una numeración de posición a base veinte (20^1), en una numeración de posición a base veinte potencia 13 (20^{13}).

Para transformar la numeración decimal habitual en una numeración extensa a base millón (10^6), Chuquet propuso tres innovaciones:

a) de seis en seis, colocar un signo separador de periodo (tramo de 6 dígitos), es decir, una especie de apóstrofo que se ha marcado por un pequeño círculo rojo en la Fig. 10,

b) crear una terminología abierta denominada escala larga para designar los nudos (millón, billón, trillón, cuadrilón, etc.) de su numeración (teóricamente infinita, pero en la práctica limitada por la capacidad generativa de la numeración hablada del latín),

c) exigir que la imaginación conciba cada periodo (tramo de 6 cifras) como una (super) cifra en numeración de base millón.

Imaginemos un matemático maya de Cobá en búsqueda (como Nicolas Chuquet o el Arquímedes de la numeración du *Traité de l'arénaire*) de una extensión de su numeración vigesimal de posición[20], a punto de preparar las estelas para recibir tramos de 13 monomios delimitados por un cambio de orientación de sus coeficientes. Nuevos nudos expresados en **grandes baktun** que el escriba habría podido pronunciar con la ayuda de un numeral olmeca jugando el papel de los prefijos latinos (*bi-*, *tri-*) que operan de modo multiplicativo sobre los **mil grandes** de Chuquet.

Conclusión

Los textos mayas escritos antes de la llegada de los europeos y que llegaron hasta nosotros eran ilustrados y dispuestos en doble columna de glifos. En mi opinión, su mayor originalidad proviene del dominio de las ecuaciones calendáricas, lo que permite montar un relato en racimos de acontecimientos debidamente datados y unidos por los números de distancia que contaban los

[19] **744 324** trillones **804 300** billones **700 023** millones **654 321** (unidades) presenta un *lapsus calami* en el 2º trozo (un cero a más) **744324.8043000.700023.654321**.

[20] Algunos ejemplos (Cauty y Hoppan, 2007) prueban que los escribas mayas operaban con grandes números con más de cinco cifras significativas. Además de los números "serpientes" del códice de Dresde, encontramos: el número **0.0;10.19.17.14.** (que conduce al **1 Ahau *8 Ch'en***) de la estela N de Copán (lado Este), la serie **7.18.2.9.1;12.1.** del Templo de las Inscripciones (Palenque), la serie de ocho cifras de la estela 10 de Tikal, o la de trece cifras (entre las cuales hay ocho **13.** iniciales) del escalón 7, escalera 2 de Yaxchilán.

días que los separaban. Son los únicos grandes números que cruzaron el tsunami de la colonización española. El examen de estos números muestra que los escribas mayas vinculaban acontecimientos de tres dominios de experiencia: mitología, historia y "astronología"[21].

Como norma general podemos decir, junto con Baudez (2002:212-213), que los textos mayas cuentan (narración) y cuentan (conteo) el tiempo de las realezas sagradas centradas en la figura del Rey Sol. Un tiempo que se interpreta y se lee sobre la escena del cosmograma, el campo de juego de pelota y los observatorios de los movimientos del Sol, de Venus, de la Luna y de los planetas. Un relato que se desarrolla en el espacio/tiempo singular de los 13 cielos, de los 9 infiernos y de las 7 tierras/mares. Une saga que los mayas repetían en los aniversarios del calendario litúrgico para conjurar el destino, vencer las angustias y hacer que persista en el ser el universo, la ciudad, y cada uno de los habitantes de una Mesoamérica agrícola, comerciante, religiosa y guerrera.

Otra especificidad de los textos mayas sólo se conoce por medio de los códices del Postclásico. Sus páginas presentan numerosas tablas de múltiplos de los ciclos que componen la floresta de los calendarios mayas. Estas tablas siempre se asocian a tabelas de fechas, más a menudo de fechas **αX** en calendario de la semana adivinatoria. El estudio de los mixtos "tabla × tabela" mostraría que se trata de herramientas que permitían que los escribas mayas pudiesen co-mensurar dos (o más) ciclos sumergiéndolos en su producto al menor múltiplo común (usando, por ejemplo, el hecho de que 5 revoluciones de Venus de 584 días forman 8 años comunes de 365 días, o que 52 *ha'ab* forman 73 *tzolkin*). Los mixtos "tabla × tabela" también mostrarían que los escribas buscaban las traslaciones que dejaran invariables todo o algunas partes de una fecha; y que eles, los escribas, podían aproximar cualquier ciclo astronómico, por ejemplo el ciclo del retorno de los eclipses o de las fases de Venus, encuadrándolo por los múltiplos superior e inferior a su periodo que solían traducir en diversas unidades de tiempo comprendidas usualmente, como el *tzolkin* y el *ha'ab*, entre el CR y el **kin**.

Referencias

Baudez, C.-F. (2002). *Une histoire de la religion des Mayas*, Paris : Albin Michel.

Cauty, A. (1987). *L'énoncé mathématique et les numérations parlées. Contribution pluridisciplinaire en vue de l'Education contre l'ethnocide* (Thèse de doctorat d'état ès sciences).Université de Nantes, Nantes.

Cauty, A. (2012). Multiversalité du temps, du calendrier et du zéro maya. *Chantiers Amerindia,* 32, suppl. 1, Paris : Association d'Ethnolinguistique Amérindienne, 1-223.

Cauty, A. et Hoppan, J.-M. (2007). Les écritures mayas du nombre, 39 pages sur le site du CELIA : http://celia.cnrs.fr/FichExt/Etudes/Maya/FDLCultureMath_proPDF_version%20CELIA%20bis.pdf

Chuquet, N. (1484). *Triparty en la science des nombres*..., Fonds français, manuscrit 1346, Bibliothèque Nationale, Paris.

Edmonson, M. (2000). Los calendarios de la Conquista. *Calendarios prehispánicos, Arqueología mexicana*, *7*(41), 40-45.

Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris: Flammarion.

[21] Neologismo formado por condensación de las palabras "astronomía" y "astrología" para designar usos que mezclan observaciones astronómicas con precisión de un día y construcciones astrológicas basadas en principios cosmogónicos y numerológicos.

Hoppan, J.-M. (2007). Le Calendrier maya. *Les Calendriers*, Bulletin de l'Association des Anciens Élèves de l'Institut National des Langues et Civilisations Orientales, Paris, Inalco, numéro spécial, 11-28.

Hoppan, J.-M. (2014). *Parlons maya classique. Déchiffrement de l'écriture glyphique (Mexique, Guatemala, Belize, Hondura)*, Paris, L'Harmattan.

Convenciones y abreviaciones

Las palabras mayas se dan en yucateco y ortografía colonial. Los logogramas se escriben en MAYUSCULAS, y los silabogramas en **negrito**: CHUM 'cero ordinal', **mi** 'cero cardinal'. Los nombres **X** de los días, con Mayúscula inicial y **negrito**: **Ahau**. Los ***Y*** de los meses en **negrito**, *itálico* y Mayúscula: ***Pop***. Las unidades están en **negrito** y subrayadas: **bak/baktun**.

α = Natural de **1** à **13**; α**X** = Fecha del calendario de la semana adivinatoria (*tzolkin*)

β = Natural de ***0*** à ***19***; β***Y*** = Fecha del calendario del año solar (*ha'ab*)

α**X**β***Y*** o (α**X**, β***Y***) = Fecha del CR, Calendario ritual

α/ω = punto de partida/llegada de un ciclo, en especial de la(s) era(s) maya(s)

CL = Cuenta larga; **CR** = Calendario ritual (*Calendar Round*) de 18 980 fechas α**X**β***Y***

GI = Glifo Introductorio de serie inicial

SI = Serie inicial (usualmente, un número con cinco cifras significativas)