



¿Cómo Contextualizar y Dejar Pensar la Matemática?

Carlos **Sánchez** Fernández
Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

En esta conferencia nos interesa motivar la reflexión sobre la importancia de imbricar en el discurso matemático no solo el contexto lógico de justificación del saber, o el importante contexto de aplicación, sino sobre todo el contexto de origen y construcción de los diferentes saberes y métodos, específicamente, la contextualización con el recurso de la Historia de la Matemática. Pero dado un programa obligatorio a cumplir en un calendario escolar rígido, ¿cómo presentar, contextualizar, dejar pensar, formalizar los contenidos del programa y cumplir los objetivos del curso, todo en un tiempo restringido?

Pretendemos compartir experiencias en la búsqueda de una respuesta a ese cuestionamiento. Desde una perspectiva histórico-cultural, ilustramos nuestras ideas a través del análisis de un asunto atractivo sobre medida de magnitudes geométricas, tema con una larga historia y muchas aplicaciones actuales, que sin embargo, es poco referido en las clases tradicionales: *el problema isoperimétrico con polígonos*.

Palabras claves: Historia de la Matemática, contextualización, pensar matemáticamente, cultura matemática, problema isoperimétrico.

A manera de introducción: ¿Pensar matemáticamente o pensar la matemática?

Posiblemente el principal objetivo que la mayor parte de los profesores quisiéramos lograr con nuestras clases es desarrollar un alto nivel de razonamiento matemático. El proceso de razonar es tan complejo, que no se puede describir en pocas y precisas palabras. Por eso se han publicado tantos artículos y libros con diferentes enfoques y detalles -p. e., entre los más recientes recomendamos: Harel, G.; Soroder, L. (2005), Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010), Devlin, K. (2012)-. Apreciamos la importancia de tales textos escritos por científicos de la cognición y otros expertos, con el objetivo de dar a los maestros ideas de qué es “pensar matemáticamente” y cómo se puede desarrollar este proceso en los alumnos. También existe otra literatura del “pensar sobre la matemática”, algo que interesa sobre todo a filósofos de la Ciencia

o particularmente a epistemólogos, que ven en la Matemática un campo muy fértil para sembrar sus concepciones generales -p. e. invitamos a dar una ojeada al texto del filósofo estructuralista Stewart Shapiro, (2000) o a alguno de la filósofa de la corriente naturalista Penélope Maady, como (2007).

Nuestra intención en esta conferencia es mucho más modesta. No nos consideramos expertos ni en las Ciencias de la Cognición, ni en la Filosofía de la Ciencia, y por tanto, no pretendemos conducir el discurso en la dirección del “pensar matemáticamente” ni en el de “pensar sobre la matemática”, aunque, como se constatará enseguida, contemplamos asuntos muy cercanos y otros con amplia interrelación.

Desde nuestra visión como profesores de matemática nos interesa, ante todo, compartir experiencias acerca de lo que denominaremos: *pensar la matemática a través de la contextualización histórica del discurso*. El apelativo puede parecer pretencioso, pero nuestro objetivo es claro: usar la Historia de la Matemática para ayudar a que el discurso en las clases y textos sea más atractivo y eficaz. Nuestra propuesta, con cierta originalidad en la forma, en su esencia no es novedosa. En las últimas dos décadas se ha publicado bastante sobre la integración de la investigación histórica con la práctica educativa matemática, recomendamos, por ejemplo, las colecciones de trabajos en Calinger (1996), el estudio ICMI editado por Fauvel y Maanen (2000), la recopilación de Katz (2000) y, más recientemente, el artículo de Jankvist (2009). En Cuba, dirigimos un grupo de investigación en Historia y Metodología de la Matemática y particularmente, la Profesora Concepción Valdés y yo, en base a nuestra experiencia hemos elaborado algunas modestas ideas que hemos presentado en varios eventos científicos y publicaciones especializadas como, por ejemplo, en Sánchez (1994), Sánchez y Valdés (1997), Sánchez y Valdés (1999), Sánchez y Valdés (2010), Sánchez (2011), Valdés-Sánchez (2011). Creemos que este tema, aunque pueda parecer trivial, no lo es y merita una atención desde diferentes enfoques. De ahí nuestro interés explícito en compartir experiencias y las concretamos con el análisis de un tema atractivo sobre medida de magnitudes geométricas, un asunto poco examinado en las clases tradicionales: *el problema isoperimétrico con polígonos*.

Nuestras clases deberían ser portadoras de una doble intención: presentar grandes ideas matemáticas y lograr que nuestros estudiantes no solo piensen mejor la matemática, sino que también lleven este pensamiento fuera del ámbito de la matemática con satisfacción y convencidos que esta es una forma agradable de “ganarse la vida” -aunque no sea la más lucrativa-. En fin, las clases deberían ser un vehículo para desarrollar una *cultura matemática*. Esto, en nuestra opinión, es uno de los compromisos sociales de la educación matemática. No educamos simplemente para hacer y aplicar matemática o para pasar con éxito las pruebas de ingreso a otros niveles de enseñanza o de la escala salarial. Esto no puede ser el fin de la educación, porque entonces inexcusablemente provocaría *el fin de la educación*. Junto con otras cualidades y competencias que se forman en los diferentes ciclos de enseñanza, aprender a pensar matemáticamente y también pensar toda la matemática que aprendemos, constituyen atajos expeditos en los caminos de la vida en el mundo contemporáneo.

En definitiva, queremos cambiar la relación afectiva que existe en la población, no solo joven, hacia la matemática. Hemos encontrado en la *contextualización con el recurso de la Historia de la Matemática* (HM) un medio para poner el discurso matemático al alcance de todos y lograr que sea *pensado y más apreciado*.

¿Por qué contextualizar con el recurso de la Historia de la Matemática

Es sabido que hay muchas maneras de contextualizar y que la más favorecida por los profesores de matemática ha sido a través del contexto de justificación, considerado intrínseco al saber matemático por su íntimo parentesco con la Lógica. En el siglo XX esta forma tradicional de contextualizar se hizo más socorrida por la simpatía ganada entre los matemáticos (algunos siguiendo la corriente) por los preceptos propagados por la escuela filosófica neopositivista a través de sus afluentes de logicismo, formalismo, estructuralismo y otros ismos. Pero en la década de los 70's y los 80's del siglo pasado aparecieron varias tendencias en los estudios filosóficos de la matemática que pusieron en relieve el contexto histórico-cultural en la construcción del conocimiento, y poco a poco fueron encontrando eco en la Educación Matemática -ver por ejemplo Kitcher (1984), Lakatos (1987) o Ruiz (1997)-. El paradigma dogmático y formalista que imperó tanto tiempo, fue dando paso a concepciones más flexibles con el uso de nuevas visiones sociológicas y metodologías empiristas que consideraban imprescindible el ingrediente histórico-cultural.

Así, se produjo una suerte de *giro cognitivo* y con él comenzaron también los intentos de establecer relaciones causales entre la experiencia matemática y las condiciones históricas de su producción. Y las razones filosóficas provocaron cuestionamientos didácticos al discurso tradicional de la matemática, tanto en clases, como en textos.

Por costumbre el discurso matemático comienza por las definiciones y continúa una trayectoria lógica que a trechos expone resultados en forma de teoremas o proposiciones, todo de forma muy ordenada, aséptica, incuestionable. Y así no es el *contexto de origen y construcción de las teorías matemáticas*. Tanto las definiciones como los teoremas comienzan con ideas y conceptos generales, producto de la reflexión sobre algún problema o asunto. Las definiciones y los teoremas surgen en algún momento avanzado de la reflexión, después de un largo tiempo madurando ideas.

¿Dónde podemos encontrar herramientas para contextualizar el origen y la construcción de las teorías matemáticas? Evidentemente en la Historia de la Matemática. ¿Qué se hace en las clases de Literatura? Se estudian los clásicos como Cervantes, Calderón de la Barca, Neruda o Carpentier. Nadie discute esta práctica, ni que en las clases de música se escuche las obras de Vivaldi, Bach o Beethoven, junto con las composiciones más contemporáneas. Entonces ¿Por qué no hacer algo similar en las clases de matemática? ¿Por qué no analizar el quehacer de Arquímedes, Newton o Euler, junto con obras más cercanas que ofrezcan modelos de cómo hacer y pensar la matemática? A través de estos paradigmas se aprende que los matemáticos desarrollan una forma de pensar singular: analítica, cuantitativa, precisa, concisa, con seso y sobre todo eficaz, porque se aplica sobre disímiles problemas del mundo a nuestro alrededor y lo más importante para los que siguen la corriente economicista, se usa una y otra vez sin que se gaste, aunque se derroche.

Después de más de 50 años de enseñanza tradicional formalista, es bastante común y muy natural, escuchar todavía a profesores de diferentes niveles de enseñanza decir que con el enfoque historicista se pierde el rigor indispensable y se desperdicia el tiempo necesario para profundizar en lo que es verdaderamente importante: *los crecientes y abstrusos contenidos de los programas vigentes*. El profesor piensa: *¿Cómo voy a conseguir hablar de la historia, si cada vez tengo más contenidos que explicar y estos nuevos asuntos son más impenetrables para mis desmotivados alumnos!* Tal pensamiento, ciertamente realista, es consecuente con la concepción

tradicional del discurso escolar. Entonces, ¿por qué no cambiamos esa concepción que no ha mostrado eficacia? ¿por qué no organizar el discurso de forma que la historia quede integrada de forma coherente, intrínseca a los contenidos y procedimientos? Nuestra experiencia nos dice que usar el enfoque historicista como recurso didáctico, aplicado sin *abusos*, abre el apetito por pensar la matemática. Contextualizar con el *uso sin abusos* de la HM (Sánchez, 1994) quiere decir entre otras cosas que no debe ser solamente y sobre todo como fuente de anécdotas, de motivaciones al margen del discurso, sino principalmente como aporte metodológico, *heurístico*, sin restregarlo con explícita pedantería, sino de forma implícita y natural, como parte indispensable del discurso intencionado tanto por la búsqueda del contexto de origen como del contexto de construcción del conocimiento. Visto así, no impide el tratamiento riguroso y profundo que merita un asunto matemático, y además, su uso crítico facilita la eliminación de la nefasta y popularizada idea de que *las matemáticas son demasiado aburridas*.

Reflexionemos un instante: ¿Es realmente competente un profesional (maestro o investigador) que solo se ha formado con el rigor lógico del discurso matemático? En el versátil y competitivo escenario actual ¿Basta con actuar disciplinadamente en el marco estrecho de algoritmos, axiomas y teoremas, aprendidos y reproducidos mecánicamente? ¿Qué hacer para eliminar el desinterés generalizado por aprender la verdadera naturaleza de la heurística matemática?

Para responder a estas interrogantes busquemos apoyo en la autoridad del distinguido Maestro español Don Miguel de Guzmán que en más de una ocasión se refirió a la importancia de estos enfoques. Escogemos un artículo (Guzmán, 1997) que puede considerarse un clásico, en el que aborda las dificultades, cambios y tendencias que se dan al interior de la enseñanza de las matemáticas y con claridad expresa:

Se trata de hacer patentes los impactos mutuos que la evolución de la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, por una parte, y la matemática, por otra, se han proporcionado.

Continúa señalando que si no se actúa razonablemente se mantendrán los mismos nefastos niveles de reprobación y de abandono escolar, la matemática seguirá considerándose como la alevosa culpable de todos los males sociales. No queda otro remedio que adecuar el discurso matemático para que aburrir, atormentar o enajenar, no sea “el fin de la educación matemática”.

Y añade cómo hacer eficaz nuestro discurso con esta intencionalidad:

De una forma semejante a la que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con el problema de matematización de la parcela de la realidad de la que se ocupa. Se trata, en primer lugar, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos, para lo cual deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente. ¿Por qué razones la comunidad matemática se ocupó con ahínco en un cierto momento de este tema y lo hizo el verdadero centro de su exploración tal vez por un período de siglos? Es extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que ellos se enfrentaron con la mirada perpleja con que la contemplaron inicialmente. La visión del tema que se nos brinda en muchos de nuestros libros de texto se parece en demasiadas ocasiones a una novela policíaca que aparece ya destripada desde el principio por haber comenzado contando el final. Contada de otra forma más razonable podría ser verdaderamente apasionante. (Guzmán 2007)

Es decir, que a través de la Historia de la Matemática podemos *contar* mejor la “Nivola¹ Matemática”. Con el recurso de la Historia el discurso *toma en cuenta*, no solo las *cuentas* -los cálculos numéricos, algebraicos o analíticos-, sino también los *cuentos* históricos, de forma que cultura matemática y cultura humanística aparezcan integradas y no contrapuestas. Y a la pregunta ¿cómo contextualizar y dejar pensar la matemática? se responde simplemente siendo crítico hacia el discurso tradicional, con una mente abierta, creativa, sin ese incondicional apego al texto desestimulante y, sobre todo, tomando en serio el recurso de la Historia de la Matemática. ¿Hay que dedicarle más tiempo a la preparación de clases? ¡Sí! ¿Es fácil? ¡NO!. Por tanto, es interesante y, se lo aseguro por experiencia propia, vale la pena.

¿Quiere decir que debemos eliminar el lenguaje formal en el discurso matemático?

Puede parecer que en nuestro análisis hemos dividido la Educación Matemática, por conveniencia, en dos grandes polos: resolución de problemas y contextualización por un lado; algorítmica y lenguaje formal por otro. Pero realmente no pensamos que estos dos ámbitos de la EM sean incompatibles, creemos que la contextualización, precisamente, establece nexos entre uno y otro. Es conveniente y difícil encontrar un equilibrio, pero vale la pena intentarlo por el impacto positivo que se produce en la relación afectiva de los jóvenes con el saber matemático.

Trabajar de forma contextualizada no es prescindir de los contenidos sino combinarlos con destreza, tratar de llegar a aplicarlos, intentar comprenderlos mejor. La contextualización para que sea efectiva en el aprendizaje debe ir seguida de un proceso de formalización, esto lo enseña también la historia, si no se hace así se corre el riesgo de reducir la clase a un conjunto de anécdotas y lo que es peor, puede transmitirse la idea de que la matemática es fácil y no precisa de esfuerzo para pensarla y aprender a resolver los problemas.

El contexto en el que queremos situar la matemática debe tomar en cuenta el grupo de alumnos concretos a los que nos dirigimos, con sus necesidades y expectativas. Poner en contexto las matemáticas permite presentar la matemática de forma más eficiente para que cada alumno aprenda de acuerdo a sus intereses culturales. Por eso, al comienzo del curso debería aplicarse una encuesta o indagar de alguna forma simple, cuáles son los gustos, entretenimientos y aficiones más comunes al grupo de alumnos.

Conocemos que en muchos países de Nuestra América se están dando pasos en esta contextualización de la matemática; hay una cierta conciencia, aunque creemos que no se ha generalizado y que a veces hay superficialidad en la toma de decisiones, de las orientaciones y en las medidas tomadas de manera unilateral. Es necesaria la coordinación, el trabajo conjunto con otras disciplinas, especialmente con la Física. Existen también experiencias que es bueno conocer y compartir con los colegas, en las cátedras, en congresos y diferentes actividades sociales de los maestros y profesores.

Aunque puede parecer más fácil, más seguro y más estable hacer lo de siempre, tanto para los alumnos como para los profesores, proponemos un cambio hacia un tipo de clase con más reflexión. No solo pensar matemáticamente o pensar sobre la matemática, sino sobre todo enseñar y aprender a *pensar la matemática*.

¹ Término introducido por Don Miguel de Unamuno al referirse a su obra “*Niebla*”(1914) en un intento de renovar las técnicas narrativas. La usamos aquí porque en esencia lo que nos preocupa y ocupa es renovar el discurso matemático, la forma de narrar la “*novela policiaca matemática*” para hacerla más encantadora, sin perder ese rigor deductivo y también heurístico que tanto atrae a muchos aficionados.

Los libros de texto son una herramienta que no siempre ayuda en estos cambios de modelo. Deberíamos conseguir que nuestras bibliotecas escolares tengan textos de matemática, adecuados y atractivos, con un enfoque histórico-cultural. En idioma español existen editoriales especializadas en este tipo de libro divulgativo, con biografías de los personajes principales de las historias que narramos, donde se presentan los mismos temas de la clase con enfoques más relajados, más amplios, con aplicaciones, curiosidades, paradojas, enigmas y misterios, tanto de los números como de las figuras.

A manera de ilustración de las ideas antes expuestas, desarrollaremos uno de los temas particulares que en los últimos años hemos experimentado en Cuba y otros escenarios académicos. Se relaciona con un asunto poco tratado en clases y que en nuestra opinión tiene múltiples posibilidades para mostrar cómo se puede contextualizar y pensar la matemática y por su interés actual debería integrarse en el tema general de medida de magnitudes geométricas.

¿Qué son y cómo se resuelven los problemas isoperimétricos con polígonos?

Los problemas de optimización que plantean la búsqueda de figuras que abarquen mayor área dentro de una cierta familia de figuras con igual perímetro, son denominados *problemas isoperimétricos*. Por su evidente importancia social y fácil formulación, pueden tener un origen anterior a la aparición de la cultura helénica. Por ejemplo, en las tabletas de arcilla de los babilonios aparecen resueltos problemas aritméticos sobre áreas que hacen pensar tuvieron tal procedencia. Pero, según relata el comentarista de Euclides, Proclo de Alejandría (s. V), todavía en la civilización helena la mayoría de los ciudadanos creía que a áreas mayores corresponden perímetros mayores. Por lo que parece, no todos los helenos eran muy duchos en este tipo de problemas.

Una explicación plausible a las falsas creencias es que en el caso de los cuadrados y los círculos existe una relación directamente proporcional entre área y perímetro. Para los cuadrados $A = \frac{P^2}{16}$ y en el caso de los círculos $A = \frac{P^2}{4\pi}$. Igual perímetro implica igual área y viceversa. Pero con los rectángulos, p. e., es otra la situación:

Tabla 1

Datos de varios rectángulos de lados a y b con perímetro P y área A

	a	b	A	P
R ₁	1	4	4	10
R ₂	2	3	6	10
R ₃	3	5	15	16
R ₄	2	7	14	18

Observemos que los rectángulos R₁ y R₂ tienen el mismo perímetro y no obstante el área de R₁ es menor que la de R₂. Por otra parte, el rectángulo R₃ tiene mayor área que el R₄, a pesar de tener un perímetro menor. Es decir que con un mismo perímetro podemos encontrar figuras poligonales del mismo género y de áreas diferentes. Es pues natural considerar el problema siguiente:

Problema Isoperimétrico con Polígonos: Entre todos los polígonos de n lados y con el mismo perímetro, encontrar aquel que tiene un área mayor.

Existe una leyenda relatada por el poeta latino Virgilio en su famosa *Eneida* (s. I n.e.), que se suele considerar como fuente original del problema isoperimétrico más antiguo de la historia. Según Virgilio, Pigmalión, rey de Tiro en el siglo IX a.C., no queriendo compartir la herencia con su hermana, la princesa Dido, la expulsó del reino y ordenó su persecución por el Mediterráneo. En la huida Dido llegó a las costas de África del Norte, donde hoy se encuentra la bahía de Túnez. Receloso, el líder de la localidad no quería dar tierras a Dido para su asentamiento. Dido, que era muy perspicaz, lo convenció diciendo que sólo necesitaba la tierra que pudiera abarcar con la piel de un toro. Entonces Dido mandó a cortar la piel en numerosas tiras largas y estrechas. Y mostrando mayor sagacidad aún, dispuso esas tiras de piel en forma de un gran semicírculo cuyo diámetro descansaba en la orilla del mar. Dentro de esta gran área se edificó la ciudad de Cartago, llamada originalmente *Birsa*, que quería decir, *piel de toro*.

La cuestión es ¿por qué Dido escogió un semicírculo y no otra figura geométrica, digamos un cuadrado o un pentágono? Trataremos de dar respuesta a esta inquietud por pasos, con una reconstrucción racional de la historia de la matemática abarcada por el problema y su solución.

Las primeras referencias documentadas las encontramos en los Elementos de Euclides (s. IV a. C.) donde se prueba que el triángulo equilátero contiene mayor área que cualquier otro triángulo del mismo perímetro y que entre los rectángulos con perímetro fijo el de área mayor es el cuadrado. Es decir, parece que Euclides intuía que entre las figuras poligonales la regular, es la óptima.

Según Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010), en el pensar matemáticamente existen cuatro procesos fundamentales, considerados en dos pares dialécticos: especialización-generalización y conjeturar-convencer. Al menos en los casos *específicos* de los triángulos y los rectángulos -que desarrollaremos más adelante- el paso hacia la *generalización* Euclides no lo consiguió dar. Quizás *conjeturó* lo mismo que nosotros, que las figuras regulares son las óptimas, pero no consiguió argumentarlo de manera *convinciente* y por eso no lo incluyó en los Elementos.

Las primeras referencias al problema isoperimétrico más general que se han encontrado, se remontan a la obra del matemático heleno Zenodoro de Atenas (s. II a. C.), quien vivió unos 100 años después de Euclides y también después de Arquímedes. Zenodoro enunció y demostró varios resultados generales relacionados con el problema isoperimétrico con polígonos, entre ellos el que se infiere de los resultados expuestos por Euclides en sus Elementos:

T1- Entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro el regular es el que tiene un área mayor.

Zenodoro *descompuso en partes* el estudio del problema T1, esto lo condujo a analizar separadamente el problema de la igualdad de los lados y el de la igualdad de los ángulos del polígono óptimo. Veamos la forma en que resuelve la primera parte:

T1.1- Entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro, el que posee un área mayor tiene todos los lados iguales.

Para resolver este problema Zenodoro primero *rebaja la dimensión del problema*, considerando los polígonos de menor número de lados, los triángulos –este proceso del pensar matemáticamente, es la *especialización* –. Para ello demuestra previamente un lema:

Lema. Dados dos triángulos con la misma base e igual perímetro, uno isósceles y el otro no, entonces el isósceles tiene un área mayor.

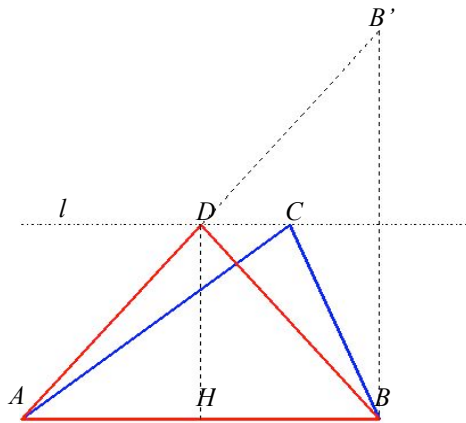


Figura 1. Triángulos con igual base y perímetro

Entonces $ADB'C$ es un triángulo y por tanto, tiene lugar la desigualdad

$$|AD| + |DB'| < |AC| + |CB'|,$$

luego se cumple

$$|AD| + |DB| < |AC| + |CB|.$$

lo que completa la prueba de la minimalidad de $|AD| + |BD|$.

El razonamiento anterior puede ser realizado fijando otro de los lados del triángulo, considerándolo como base fija, p. e. BC y dejando libre los otros dos lados, entonces se obtiene que AB y AC son iguales. Por tanto, hemos demostrado que

R1- Entre todos los triángulos con perímetro fijo, el equilátero es el que tiene área máxima.

Ahora es natural preguntarse ¿podremos aplicar el lema o el método utilizado en su demostración a un polígono de mayor número de lados? -Esto es también *generalización*, ahora, después de haber comprobado el caso concreto obtenido por la *especialización*-.

Para los triángulos, la igualdad de los lados implica la de los ángulos, por lo que el problema isoperimétrico para los triángulos está completamente resuelto. Sin embargo, cuando se trata de polígonos con mayor número de lados sería necesario probar que

T1.2- Entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro, el que tiene todos los ángulos iguales posee un área mayor.

La demostración que Zenodoro realiza de este resultado tiene algunas inexactitudes y es algo complicado, por lo que no se expone a este nivel. Sin embargo, podemos plantearlo como *conjetura* y buscar *convencimiento* a través de algún *caso específico* –precisamente, el otro par de procesos dialécticos en el pensar matemáticamente es *conjeturar-convencer*, según A. Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010)-, p.e. el caso de los cuadriláteros puede demostrarse sin dificultad y, después de hacer aclaraciones según el grupo de estudiantes, puede hasta dejarse de ejercicio.

Ejercicio 1. Prueba que entre todos los cuadriláteros con igual perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

El razonamiento de Zenodoro es por *reducción al absurdo*: supone que el triángulo ABC de área máxima, tiene sus lados AC y BC diferentes y se llega a una contradicción. Observemos que todos los triángulos con base AB que tienen la misma área que ABC deben tener el tercer vértice situado sobre la recta l que pasa por C y es paralela a AB (Fig. 1).

Seguidamente se prueba que la posición D sobre la recta l , tal que AD y BD son iguales produce un valor de $|AC| + |BC|$ mínimo. En efecto, sea el punto B' simétrico de B respecto a l . Entonces, razonamientos simples de geometría elemental, prueban que los puntos A , D y B' están alineados y $|AD| = |DB'|$. Además, puede verificarse que se cumplen las igualdades $|BC| = |CB'|$ y $|DB| = |DB'|$.

El problema resuelto en T1 por Zenodoro es el problema isoperimétrico dentro de la clase de los polígonos con un número fijo n de lados. Pero, si *dejamos pensar* un poco a los alumnos, alguien nos puede preguntar (por supuesto no tan formal):

“Profesor, entre todos los polígonos regulares de perímetro fijo P ¿cuál será el número de lados que da mayor área?”

Si conocemos la obra de Zenodoro, sabremos que demostró el resultado siguiente:

T2- Entre los polígonos regulares de igual perímetro el que tiene mayor área es el de mayor cantidad de lados.

Pero también sabremos que la demostración realizada por Zenodoro, con el empleo solo de las herramientas de la geometría elemental, es sumamente ardua y por tanto no la podemos usar exactamente así. No obstante, podemos *convencer* al alumno de la veracidad de este resultado con el auxilio que nos brindan las herramientas computacionales.

Ante todo es preciso tener una relación entre el número de lados n , el área A_n del polígono regular de n lados y su perímetro P_n . Dejamos pensar después de plantear una interrogante:

¿Conocemos alguna fórmula que relacione área y perímetro de los polígonos regulares? Si no la conocemos ¿cómo podríamos encontrarla?

Las indicaciones dependen del grupo de alumnos, pero no es difícil encontrar una relación adecuada entre el área y el perímetro de un polígono regular, basta con hacer una triangulación uniendo los vértices al centro del polígono (Fig. 2). Se formarán n triángulos isósceles iguales y con un vértice situado en el centro del polígono, cada triángulo tiene la misma altura h_n y la misma base l_n , uno de los n lados iguales del polígono (Fig.2). Por tanto, el área total viene dada por la fórmula:

$$A_n = \frac{h_n}{2} P_n,$$

donde h_n es la *apotema* del polígono regular de n lados y P_n su perímetro. En el problema isoperimétrico $P_n = P$, es una cantidad constante que se supone conocida, así que solo es necesario encontrar una expresión adecuada para h_n . El valor común de los ángulos correspondientes a este vértice es $\alpha_n = 2\pi/n$. Si consideramos la función tangente, entonces se encuentra fácilmente que

$$h_n = \frac{l_n}{2 \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{P}{2n \tan \frac{\pi}{n}}.$$

Finalmente, para el área obtenemos la relación

$$A_n = \frac{P^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}.$$

Una forma de analizar la variación de A_n como función de n , es mediante la *experimentación* (en este momento podemos auxiliarnos de una calculadora electrónica).

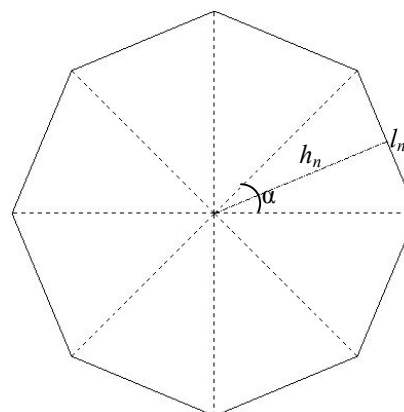


Figura 2. Triangulación de un polígono

En la Tabla 2 hemos tomado $P=2\pi$ – valor del perímetro de la circunferencia de radio unidad, y hemos calculado los valores de A_n , correspondientes a los valores de n que se indican.

Tabla 2

Valores del área A_n de los polígonos con perímetro fijo $P=2\pi$ y n lados variables

n	A_n	n	A_n	n	A_n
3	1,899406252	50	3.137457394	1000	3.141582319
7	2.927777815	100	3.140559043	10000	3.141592550
10	3.037551898	500	3.141551311	100000	3.141592652

Estos resultados corroboran el resultado de Zenodoro al menos para los valores de n escogidos. Pero ¿no podríamos evidenciar más claramente el crecimiento de las áreas A_n cuando n crece? Por supuesto esto depende del contexto de alumnos que tenemos en el aula, hay muchos grupos que nos agradecen la demostración más detallada y rigurosa y otros son felices si dejamos las ideas vírgenes. Debemos ser cuidadosos, tanto con unos como con otros, para no perder su interés, ni aburrirlos.

Teniendo en cuenta la expresión encontrada para A_n , el problema sería

Problema auxiliar: *Demostrar que, cuando $m > n \geq 3$, tiene lugar la desigualdad:*

$$n \tan \frac{\pi}{n} > m \tan \frac{\pi}{m}.$$

Se puede dejar pensar al alumno y que compruebe *por sí mismo cuán ineficaz es intentar realizar esta demostración en forma elemental*, solo con los recursos de la geometría y trigonometría. Después de que lleguen al convencimiento, podemos tratar de *modificar la desigualdad* de manera que podamos *visualizarla* gráficamente. Por ejemplo, expresar esta desigualdad de forma que se desprenda de la propiedad de alguna curva conocida. El profesor debe dar indicaciones adecuadas. Veamos qué sucede si *modificamos la notación*. Hagamos el cambio de variable

$$v = \frac{\pi}{n} \quad \text{y} \quad u = \frac{\pi}{m},$$

Entonces el problema se convierte en justificar que, para valores de u y v tales que $0 < u < v < \pi/3$ tiene lugar

$$\frac{\tan u}{u} < \frac{\tan v}{v}.$$

Esta última relación significa que la ordenada de la curva $y = \frac{\tan x}{x}$ debe aumentar en la medida que crecen los valores de la variable x en el intervalo $[0, \pi/3]$. El gráfico de esta curva se muestra en la Fig.3, pero el alumno podría obtenerlo fácilmente con la ayuda de algún programa informático adecuado o

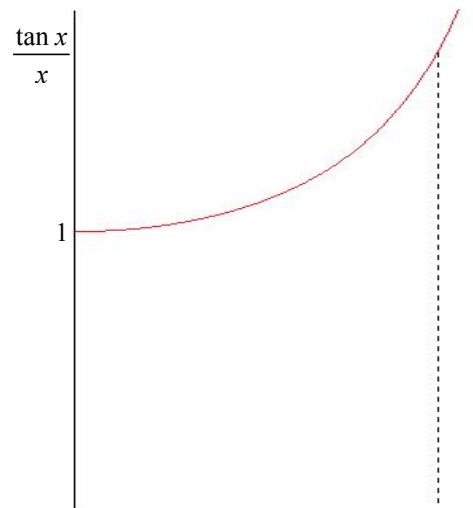


Figura 3: Curva $y=(\tan x)/x$ $\pi/3$

incluso mediante una calculadora gráfica.

De este modo, nos hemos convencido del resultado R3 de Zenodoro, es decir, a mayor cantidad de lados el polígono regular de perímetro dado aumenta su área. Pero entonces ¿cuál será el polígono regular que tiene área máxima? La intuición nos sugiere que tal polígono debería tener infinita cantidad de lados. Por otra parte, un análisis cuidadoso de la tabla anterior, permite advertir que los valores de las áreas de los polígonos no solo crecen, sino que se aproximan cada vez más a cierta cantidad. No es difícil identificar este valor "límite" como el número π , área del círculo de radio 1, con perímetro $P=2\pi$, el cual es precisamente el perímetro común de los polígonos cuyas áreas aparecen en la tabla. Por tanto, es natural *imaginar*, como lo imaginó Zenodoro y antes que él la princesa Dido, que el *círculo es la solución al problema*

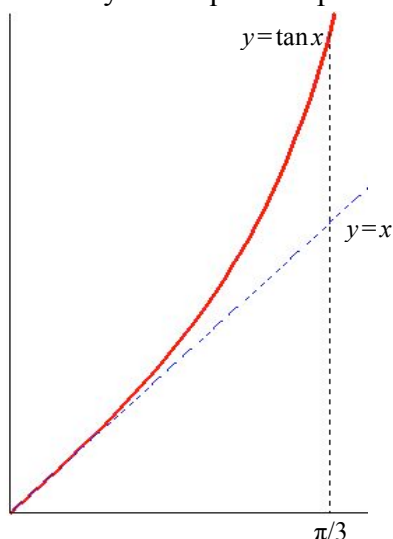


Figura 4: Curva $y = \tan x$

isoperimétrico de los polígonos. Entonces, para concluir (siempre que el contexto del aula lo asimile) planteamos la resolución del problema concreto siguiente:

Probar que el círculo con perímetro P tiene mayor área que cualquier polígono con ese mismo perímetro.

El área A_n del polígono de n lados con perímetro P , viene dada por la expresión

$$A_n = \frac{P^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$$

y el área A del círculo del mismo perímetro cumple la relación

$$A = \frac{P^2}{4\pi}$$

Por tanto, solo es necesario probar que $A \geq A_n$, lo que equivale a demostrar la desigualdad

$$n \tan \frac{\pi}{n} \geq \pi \quad \text{o} \quad \tan \frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{n}$$

Utilizando el mismo recurso que en el problema anterior, la podemos reescribir en la forma

$$\tan x \geq x, \quad \text{donde } 0 < x < \pi/3.$$

En la Fig.4 se ve claramente que el gráfico de la curva $y = \tan x$ (en rojo) permanece siempre por encima del gráfico de la recta $y = x$ (en azul), lo cual es una evidencia gráfica del cumplimiento de la desigualdad anterior.

En este caso, no obstante, la desigualdad puede probarse fácilmente con métodos elementales.

En un círculo de radio uno, construyamos el sector MOP de ángulo x y que, por tanto, tiene área $x/2$ (Fig.5). Entonces la longitud del segmento MR es $\tan x$ y el área del triángulo MOR será igual a $\frac{\tan x}{2}$. Pero, evidentemente el área del triángulo es mayor que la del sector, de donde sigue inmediatamente la desigualdad que queremos probar.

De esta forma concluimos que el círculo, considerado como polígono regular de infinitos lados, es la figura que resuelve el problema isoperimétrico para polígonos.

Esta afirmación no justifica que el círculo es mejor que cualquier otra curva cerrada, digamos una elipse. No obstante, podemos proporcionar argumentos para *convencer* que el círculo también es solución cuando se piensa en una curva "arbitraria":

A una curva cerrada cualquiera podemos asociar una poligonal con lados de longitud muy pequeña, la cual también será cerrada y por tanto limitará un polígono. Pero, de todos los polígonos, los regulares son los mejores y la curva que puede ser considerada como óptima a partir de este tipo de polígonos regulares es la circunferencia. Aunque no sea una demostración rigurosa, ¿no será esto convincente?

Y las abejas ¿cómo se habrán convencido de que los polígonos óptimos en la solución de los problemas isoperimétricos son los de mayor número de lados?

El matemático **Pappus** de Alejandría (s. IV d. C.), famoso por sus comentarios de los trabajos de sus predecesores, proporcionó una aplicación muy interesante del resultado isoperimétrico. En el prefacio a su trabajo "*Sobre la sagacidad de las abejas*" Pappus explica en forma muy atractiva esta idea y hemos decidido citar por extenso:

Es claro que Dios le ha dado al hombre la mejor y más perfecta noción de sabiduría en general y de la ciencia matemática en particular, pero una parte de tales cosas también las compartió con algunos de los animales irracionales. Del hombre, al estar provisto de raciocinio, el espera que haga todas las cosas según la razón y la demostración, pero a los otros animales, mientras les niega esto, les garantiza que, en virtud de un cierto instinto natural, obtengan precisamente aquello que es necesario para la conservación de la vida. La existencia de este instinto puede ser observada en muchas otras especies de criaturas vivientes, pero sobre todo en las abejas... primero coleccionan el néctar de las flores más bellas que crecen en la tierra, para el almacenamiento de la miel construyen los recipientes, llamados panales, de celdas todas iguales, contiguas una a la otra y de forma hexagonal. [...]Ellas necesariamente deben pensar que las figuras deben ser contiguas una a la otra, esto es tener lados comunes, para que ninguna materia extraña pueda penetrar por los intersticios y así corromper la pureza de su producción [...]. Existen tres figuras capaces por sí mismas de llenar exactamente el espacio alrededor de un mismo punto. Las abejas, de acuerdo a su sabiduría instintiva, seleccionan para la construcción de los panales la figura que tiene más lados, a causa de que ellas imaginan que ésta contendría más miel que cualquiera de las otras dos. (Heath, 1981, pag.389)

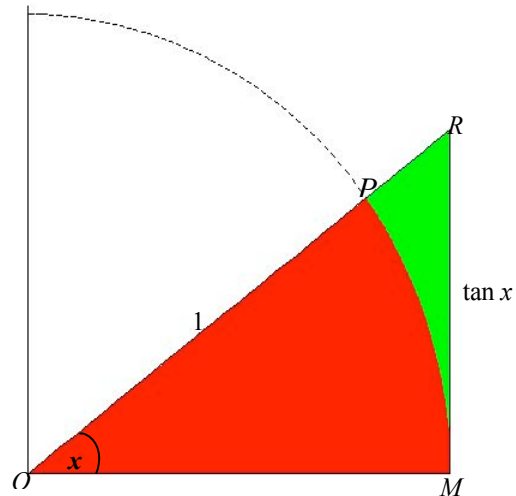


Fig.5

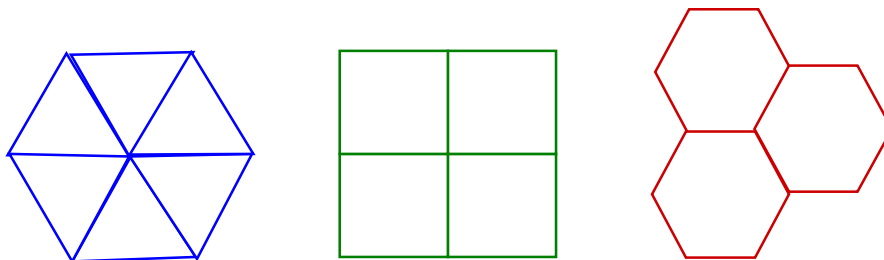


Figura 6. Únicos teselados posibles con polígonos regulares

Con los conocimientos anteriores demos una *convinciente* argumentación de que las abejas no se equivocan cuando dan a las celdas de sus panales una forma hexagonal (Fig. 6). Como comenta Pappus, el uso de polígonos como base de las celdas es la mejor forma de no dejar intersticios y usar "paredes" comunes a varias celdas para optimizar el uso de materiales. Si además, queremos que estas celdas tengan la máxima capacidad, entonces el polígono de base deberá tener la mayor área posible luego, por el resultado anterior de Zenodoro, debe ser regular. Pero ¿qué tipo de polígono regular será conveniente usar? Como no queremos que queden "agujeros", ellos deben "encajar" precisamente, esto es, deben poder acomodarse en torno a un vértice común de forma exacta (Fig. 6).

Se sabe que los ángulos interiores de un polígono regular de n lados miden $(n-2)\pi/n$. Luego n debe ser tal que podamos disponer alrededor de un punto un número entero k de ángulos de esa magnitud. Como la suma de los ángulos alrededor de un punto es 2π , entonces tendrá que cumplirse la relación:

$$\frac{2\pi}{\frac{n-2}{n}\pi} = \frac{2n}{n-2} = k. \quad (1)$$

De modo que necesitamos encontrar los valores enteros de k y n ($n \geq 3$) que hacen posible la relación anterior. Cálculos sencillos muestran que para $n=3, 4, 6$ se obtiene $k=6, 4, 3$ respectivamente, pero cuando $n=5, 7, 8$ no es posible obtener un valor entero de k . Probemos que los únicos polígonos a tener en cuenta son precisamente: triángulos, cuadrados y hexágonos.

La igualdad en (1) puede ser escrita en la forma: $\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$,

pero n es positivo, luego $k \geq 3$, por tanto:

$$1 = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \geq 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{n},$$

de donde se tiene que $n \leq 6$. Luego las únicas tres posibilidades es colocar en torno a un vértice 6 triángulos o 4 cuadrados o 3 hexágonos como se muestra en Fig. 7.

Ahora se explica fácilmente la decisión de las abejas: *los hexágonos son los que proporcionan un área mayor*. Quién necesite una comprobación directa, sin acudir a la solución general dada para el problema isoperimétrico con polígonos, puede observar que las áreas A_3 , A_4 , A_6 de un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular con el mismo perímetro P vienen dadas por:

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{36} P^2 \approx 0,0481P^2, \quad A_4 = \frac{P^2}{16} \approx 0.0625P^2, \quad A_6 = \frac{\sqrt{3}}{18} P^2 \approx 0,0962P^2,$$

que evidentemente satisfacen $A_3 < A_4 < A_6$.

¡Qué sabiduría la de las abejas!

A manera de conclusiones: ¿Convencer o Vencer?

El razonamiento que desarrollamos como solución al problema isoperimétrico no constituye una justificación matemática aceptable para los cánones de rigor actual, ni tampoco brinda un argumento matemático claro a la elección de Dido. Una demostración rigurosa de que el círculo es la mejor opción entre todas las curvas cerradas, solo fue encontrada por métodos elementales en el siglo XIX por el geómetra suizo Jakob Steiner y después con el uso de la teoría de series trigonométricas por el alemán Adolf Hurwitz.-ver p. e. el excelente libro Tikhomirov (1990)-. Pero para convencer a jóvenes de enseñanza preuniversitaria y educarlos en *pensar la matemática* ¿No basta usar los argumentos heurísticos asociados al contexto de origen y resolución de tales problemas y rematar con el experimento con calculadoras? Si nos empeñamos en presentar de forma tradicional la solución, entonces muchos de los alumnos se aburrirían o desconectarían la atención por no alcanzarles la motivación para seguir el discurso. Al final sentiríamos la satisfacción de haber hecho una argumentación rigurosa, pero la mayoría de los alumnos se sentirían agobiados, rendidos. ¡De seguro que *los vencemos, pero no los convencemos!*

Según el contexto de alumnos se organiza la clase. Se puede plantear la solución de una parte de los problemas y comentar los otros, utilizando la experimentación gráfica o computacional con el fin de abrir el apetito para temas más avanzados de geometría o trigonometría o incluso de cálculo. En el caso muy especial de alumnos de talento y con afición expresa por la matemática, entonces seguro desearán conocer la demostración formal realizada por Steiner y ¿por qué no mostrarles un esquema de la misma para convencerlos? –Por cierto, la demostración de Steiner no es completamente rigurosa, porque da por supuesta la existencia de una figura óptima- Si estamos trabajando con alumnos universitarios, que han pasado cursos de Cálculo Avanzado, resulta muy edificante enseñarles la solución de Hurwitz que hace uso de la llamada identidad de Parseval que cumplen los coeficientes de Fourier de toda función suficientemente regular.

El nivel de formalización y profundización depende del grupo de estudiantes, no solo del nivel de escolaridad, sino de sus competencias e intereses culturales. Queremos dejar pensar la matemática y no que nos “desconecten” la atención. Porque lo que no se puede olvidar es que para pensar la matemática, ante todo ¡tenemos que saber la matemática! y por supuesto, primero los maestros y después los alumnos. Es obvio, pero no siempre lo tenemos presente en nuestras decisiones docentes.

Como queda claro en las ideas compartidas sobre la heurística del problema isoperimétrico el conocimiento de las fórmulas es importante en la resolución de problemas. Pero la mayoría de las fórmulas y algoritmos no necesitamos memorizarla, es suficiente saber dónde buscar cuando se precisan: en un texto o a través de un software especializado o ¿por qué no? a partir de nuestra propias deducciones. Lo más importante es saber *pensar las fórmulas, pensar los algoritmos, pensar los teoremas*, aprender a usarlos creativamente para hallar nuevas relaciones no explícitas, nuevos algoritmos más eficaces y hasta otros teoremas más elegantes.

Para terminar nuestro relato demos a conocer lo que el gran maestro de la teoría moderna de la medida, el francés Henri Lebesgue decía por los años 1930's en su famosa obra *La Mesure des Grandeurs* (La Medida de las Magnitudes):

El profesor de matemáticas, aquel de la enseñanza media en particular, no tiene que formar lógicos puros, debe contribuir a formar hombres que razonen y para esto debe ocuparse no solamente de los razonamientos rigurosos, sino sobre todo de la adquisición de las premisas de estos razonamientos y de la aplicación de sus resultados a lo concreto.

Y complementemos estas palabras con algo similar expresado por uno de los más completos matemáticos y educadores del siglo XX, que aplicó con astucia las ideas de Lebesgue a la construcción de una sólida Teoría de las Probabilidades, el ruso Andrei Nikoláyevich Kolmogórov:

[...] A los profesores de matemática tanto en la escuela media como en la superior, se les debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien las matemáticas puede sólo aquel que la ame con pasión, la comprenda como una ciencia viva y conozca el contexto histórico que originó sus conceptos.

Referencias y bibliografía

- Calinger, R. (Ed.) (1996) *Vita Mathematica: Historical research and integration with teaching*. MAA. Washington DC.
- Devlin, K. (2012) *Introduction to Mathematical Thinking*. MAA. Washington DC.
- Fauvel, J.; Maanen, J. (Eds.) (2000) *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Guzmán, M. de (2007) Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* N°43, pp. 19-58.
- Harel, G.; Soroder, L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at any age. *Mathematical Thinking and Learning* Vol. 7 N° 1, 27-50.
- Heath, Th. (1981) *A History of Greek Mathematics*. Vol. II *From Aristarchus to Diphantus*. Dover Publ. N. Y.
- Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Math*.
- Katz, V. (ed) (2000) *Using history to teach mathematics: An international perspective*. MAA. Washington DC.
- Kitcher, Ph. (1984) *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford Univ. Press. N. Y.
- Lakatos, I. (1987) ¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática? en *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*, ed. Alianza. Madrid.
- Maady, P. (2007) *Second Philosophy. A Naturalistic Method*. Clarendon Press. Oxford.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010) *Thinking Mathematically*. 2nd. ed. Prentice Hall (La 1^a ed. apareció en 1982 y fue traducida al español)
- Ruiz, A. (1997) *Las posibilidades de la historia en la educación matemática. Una visión filosófica*. Boletín Informativo CIAEM. Año 5, n°.2

- Sánchez, C. (1994). Usos y Abusos de la Historia de la Matemática en el Proceso de Aprendizaje, en Nobre, S.(ed.) *Procc. Meeting of the HPM Group*. Blumenau.
- Sánchez, C. (2011) ¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife.
- Sánchez, C.; Valdés, C. (1997) Ilustraciones del uso de la historia de la matemática en una enseñanza centrada en resolución de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Vol. 9, N° 3, 86-96
- Sánchez, C.; Valdés, C. (1999) Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática, *Revista Ciencias Matemáticas* Vol.17, N.2, pp. 137-148.
- Sánchez, C.; Valdés, C. (2000) Proposiciones para un estudio dinámico de la medida. En Fossa, J. (ed.) *Facetas do diamante. Ensaio sobre Educação Matemática e História da Matemática*. Editora da SBHMat. Rio Claro, pp. 31-58.
- Shapiro, S. (2000) *Thinking about Mathematics. Philosophy of Mathematics*. Oxford University Press. N. Y.
- Tikhomirov, V. M. (1990) *Stories about Maxima and Minima*. MAA. Washington DC
- Valdés, C.; Sánchez C. (2011) *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. Félix Varela. La Habana.