

*Palabras del Dr. Luis Antonio Santaló  
al recibir la investidura de Doctor Honoris Causa  
de la  
Universidad de Sevilla*

Cumplo emocionado pero con el mayor gusto, con el deber de expresar mi profundo agradecimiento por el alto honor que esta Universidad de Sevilla me ha conferido, al distinguirme con el nombramiento de doctor Honoris Causa de la misma.

Nacido y formado en España, pero trasplantado a América, a las orillas del estuario del Río de la Plata, al llegar a la edad en que son ya pocas las esperanzas y muchos los recuerdos, los sentimientos aparecen tironeados por las improntas de los años de juventud en la patria de origen y de aquellos que les siguieron, ya muchos más que los primero, en la patria americana de mi mujer, de mis hijas y de mis nietos. Son fuerzas contrapuestas que parten tanto de las raíces ancladas en el pasado como de las hincadas en el futuro, fuerzas cada vez más fuertes, generadoras de sentimientos cada vez más hondos. Entre ellos, el agradecimiento ante muestras de

*afecto y amistad, siempre obligado, se vuelve profundo y muy sentido, al mismo tiempo que en casos como el de hoy se mezcla con el placer de encontrar amigos de muchos años y otros nuevos que habrán de serlo para siempre.*

*Los que hemos tenido la vida repartida entre este y el otro lado de los mares, viviendo siempre comparando acciones, costumbres, paisajes y escenarios, estamos marcados por el signo de una eterna añoranza, que nos empuja hacia el pasado y nos sensibiliza intensamente ante cualquier situación que suscite recuerdos o evoque historias. Por esto, tanto por el tiempo, en que el mundo se prepara para conmemorar el quinto centenario del descubrimiento de América, como por el lugar, esta luminosa tierra andaluza en que la gesta se planificó e inició, me siento hoy particularmente emocionado. Me siento parte e intérprete de las generaciones que durante estos siglos emigraron hacia aquellas costas, siempre hospitalarias, que como Aïssa a su príncipe encantado, supieron darnos "hijos, un poco de tierra, mujer y un mucho de amor", pero que nunca borraron del todo en nuestro trasfondo íntimo, los dejos de la tierra lejana.*

Como es costumbre al recibir una alta distinción, como la presente, me voy a permitir exponer algunas consideraciones sobre la ciencia de mi especialidad, la matemática, y las sucesivas deseciones de la misma hasta ubicar el lugar que en ella ocupa el capítulo especial en el que mayormente he trabajado, la llamada geometría integral o estocástica. Ha sido una labor de más de 50 años, los suficientes para haber sido testigo del origen y desarrollo de estas disciplinas, hasta el presente, en que ya se vislumbra su extinción, no por desaparición sin rastro, sino por su disolución dentro de teorías más amplias y unificadoras, prestando a las mismas su esfuerzo y ayuda para seguir marchando, conjuntamente, hacia nuevas formas y nuevas perspectivas.

Este hecho particular es un ejemplo del frenesí con que hoy día avanzan todas las ramas de la ciencia. En pocas décadas vemos nacer, desarrollar y pasar al olvido teorías que rápidamente son sustituidas por otras, que si bien a veces son las mismas con diferente ropaje, siempre dejan una resultante positiva y el universo del conocimiento se expande a una

velocidad difícil de seguir, si no es a través de postas sucesivas y relevos incesantes de los equipos creadores.

La cantidad de nuevos conocimientos que se producen actualmente en todas las ramas del saber, sigue un crecimiento exponencial sin precedentes, y la matemática no escapa a esa tendencia general, más bien es uno de sus ejemplos más significativos. Un cálculo aproximado conduce a que si se juntaran todos los trabajos de matemática publicados en el mundo durante el año 1989, supuestamente originales (comentados en la revista *Mathematical Reviews*), y se juntaran en volúmenes de 1.000 páginas cada uno, resultaría una colección de 350 volúmenes. Este hecho origina graves problemas de información y de almacenamiento, pues resultan insuficientes tanto los espacios como los presupuestos destinados a las hemerotecas. Por otra parte, este mare magnum de publicaciones no es proporcional a su utilidad, pues seguramente que muchas de ellas que podrían ser útiles en otros capítulos de la matemática o en otras ramas del conocimiento, pasan desapercibidas. Es imposible estar enterado de todo lo que a cada uno pudiera interesar; la única esperanza son

los modernos ordenadores, que permiten almacenar en muy poco espacio mucha información y permiten, además, identificar y encontrar los datos buscados.

Cabe preguntarse por las causas de tan ingente producción científica. Una de ellas, evidentemente, es la ley general que rige el crecimiento de las poblaciones, según la cual la producción engendra más producción, como consecuencia de que la pendiente del crecimiento es proporcional al volumen de lo creado. Pero otra causa importante es la aparición generalizada en todos los países, durante la actual segunda mitad del siglo XX, de la investigación científica como profesión. En épocas anteriores, los investigadores ejercían una cierta profesión, que les proporcionaba el sustento y con la cual cumplían con la sociedad, y "además", si se sentían motivados por su vocación, se dedicaban a la investigación, como tarea complementaria, no obligatoria y no remunerada. Por esto, los investigadores científicos eran considerados personas que se sacrificaban para el bien común y que por ello eran merecedores del mayor agradecimiento y admiración.

Actualmente, prácticamente desde la segunda gran guerra mundial (1939-45), la cosa ha cambiado, pues la mayoría de los investigadores realizan sus tareas en ejercicio de una profesión asalariada, es decir, como una obligación libremente elegida y adecuadamente remunerada. Esto hace que la investigación científica haya pasado a ser, como decía Ortega y Gasset, "una dimensión de la vida humana ante la cual no tienen sentido asparientos ni de pasmo en el público ni de presuntuosidad en el actor" y, por otra parte, explica el crecimiento desorbitado de la producción científica, en particular de la matemática, lo que hace difícil la caracterización del tema específico en que cada uno trabaja, por la frondosidad de las ramas de esa ciencia y su crecimiento incesante e irregular, de manera imbricada y entrelazada.

Vamos a hacer un poco de historia para ver como la idea general de lo que llamamos matemática, se ha ido diferenciando y creciendo por sucesivas divisiones y por el nacimiento en ellas de nuevas ramas con complicadas interconexiones.

Cuando el hombre empezó a sentir la necesidad o la curiosidad de conocer su entorno y entender el mundo en que vivía, surgieron dos actividades fundamentales: contar y medir. Con el contar nacieron los números y las operaciones con ellos: fué el cálculo. Con el medir se fueron perfilando las formas y las figuras: fué la geometría. Ambas actividades constituyeron la rama del conocimiento que se llamó matemática. Desde un principio se vió que la matemática podía ser útil para actuar, como una herramienta que había que manejar, y también para conocer, como una manera de estructurar y ordenar el pensamiento y ayudar a la creatividad. Lo primero dió lugar a la llamada matemática aplicada y lo segundo a la matemática pura, dos aspectos cuyos límites no fueron nunca, y lo han sido cada vez menos, demasiado precisos, pero que se han mantenido a través de los siglos.

Platón (-428, -347) en su República, distingue claramente ambos aspectos. Para él hay el cálculo, que recomienda prescribir para quienes habrán de desempeñar las funciones más importantes de la ciudad, "para que se eleven



por la inteligencia pura a la contemplación de la naturaleza de los números y así facilitar al alma los medios de elevarse desde la esfera de la generación hasta la verdad y la esencia” y el cálculo “de los comerciantes y traficantes, que lo cultivan con vistas a las compras y las ventas” (525, d). Análoga diferencia hace respecto de la geometría “que debe conducir el alma a contemplar la esencia y tener por objeto el conocimiento”, en vez de “manejar objetos materiales y razonar con vistas a la práctica de cuadrar, desarrollar y añadir” (527, b).

Quedaban así bien definidas una matemática pura para filósofos y entendidos, cuyo mundo es el de las ideas, y otra matemática práctica o aplicada, para las necesidades inherentes al mundo real. Sin embargo, esta diferencia entre matemática pura y matemática aplicada, no ha sido nunca tan clara como lo suponía Platón. Menos de un siglo después de la República, aparece Eratóstenes (-284, -192) que usa la matemática para medir el radio de la Tierra y también Arquímedes (-287, -212) que al mismo tiempo que

realiza finas especulaciones de la más pura matemática (método de exhaustión) aplica las mismas a problemas concretos de estática e hidroestática. En ambas creaciones, como en las posteriores de Claudio Ptolomeo (90, 168) en su trigonometría y el sistema del mundo, es difícil decidir qué partes corresponden a la matemática pura y cuáles a la aplicada.

La primera obra sistemática de geometría pura fueron los Elementos de Euclides (siglo -III) cuya pureza se refiere tanto a sus elementos constituyentes (puntos, rectas, planos) que son simples y perfectos, obtenidos por idealización de formas visuales discernibles por los sentidos, como a la construcción axiomática, que sirvió de modelo para toda la matemática posterior, y también a las nociones comunes con las que se introduce la congruencia de figuras a través de los movimientos del plano. Modificando esas distintas componentes de las cuales parte la construcción de Euclides, aparecieron con el tiempo muchas otras geometrías posibles.

Modificando los postulados nacieron las geometrías no euclidianas primero (principios del siglo XIX) y luego un sinnúmero de otras geometrías que aparecían con sólo sustituir los postulados por otros, obra que culminó en 1899 con los *Fundamentos de la Geometría* de David Hilbert (1852-1925), obra que puede considerarse terminal de la geometría al estilo de Euclides. Respecto de las "naciones comunes", sustituyendo el grupo de los movimientos por otros grupos, nacieron otras muchas geometrías que fueron ordenadas por Felix Klein (1849-1925) en su famoso *Programa de Erlangen* (1872).

También cabía extender la geometría sustituyendo los elementos básicos de Euclides (contenidos en sus definiciones: punto, recta, plano), pensados como modelos de intuiciones espaciales, por formas más complejas. Así Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) al identificar los "puntos" con pares de números reales y las "rectas" con ecuaciones lineales entre los mismos, crearon la geometría en coordenadas.

Sin perder el modelo geométrico de la Naturaleza, se puede pensar en un cambio y extensión de la geometría suponiendo una intuición distinta de la clásica. Si nuestros ojos fueran telescopios o microscopios electrónicos, nuestra intuición del mundo exterior sería muy diferente e igualmente diferente hubiera sido la geometría edificada sobre ella. Las simplificaciones introducidas por una intuición adecuada a los sentidos del hombre, hicieron que durante siglos se estudiaran únicamente curvas muy regulares, formadas por arcos con tangente continua. Tan sólo en el siglo pasado se conocieron curvas sin tangente en ningún punto (Weierstrass, 1815-1897) o curvas que llenan un área (Peano, 1858-1932), que se consideraron por mucho tiempo ejemplos patológicos, no englobados como elementos importantes de una geometría. Desde la cuarta década del siglo actual, sin embargo, este tipo de entes geométricos han empezado a estudiarse de manera sistemática y a buscarles aplicaciones en distintas partes de la ciencia. Nacieron así lo que Mandelbrot ha llamado fractales, por ser conjuntos cuya dimensión, convenientemente

definida por Hausdorff y Besicowich, es un número fraccionario. Estos nuevos entes se han podido representar gráficamente y estudiar con cierto detalle gracias a las posibilidades brindadas por las modernas computadoras electrónicas, habiendo aparecido muchas aplicaciones en diferentes problemas de la física de los sólidos y de la biología.

Todas esas generalizaciones y expansiones de la geometría, han provenido de sucesivas modificaciones de las bases sobre las que se edificó la geometría griega, simbolizada por Euclides. Pero la matemática tiene otro modo de crecimiento, que surge al trazar puentes entre partes separadas de la misma, creando híbridos, que a veces resultan de interés en sí mismos y otros para cada una de las partes involucradas. Un ejemplo típico es el de las probabilidades geométricas, resultado del cruce entre geometría y probabilidad, dos campos bien diferenciados hasta mediados del siglo XVIII.

La idea de probabilidad, si bien está implícita en cualquier juego de azar y por tanto se remonta por los menos al siglo -X de la guerra de Troya, en la cual según Sófocles

los sitiadores se entretenían jugando a los dados, no fueron sin embargo consideradas por los matemáticos hasta 1654, en una correspondencia entre Fermat y Pascal (1623-1662) acerca de una aparente paradoja surgida también de un particular juego de dados. Es decir, la teoría de las probabilidades nació de un problema de juego, actividad siempre censurada desde el punto de vista moral, y es posible que este origen "no santo", a pesar del padrinazgo aristocrático de Fermat y Pascal, fuera la causa de que por más de dos siglos, el cálculo de probabilidades quedara excluido de los claustros académicos.

Sin embargo ese cálculo fué progresando, sobre todo gracias a la obra póstuma de Jacobo Bernoulli (1654-1705), titulada *Ars Conjectandi*, aparecida en 1713, y cuando ya había alcanzado un alto grado de desarrollo, en 1777 apareció el curioso opúsculo *Essai D'Arithmétique Morale* de George Louis Leclerc (1707-1788), conde de Buffon, autor de una famosa *Historia Natural* de 36 volúmenes, en uno de los cuales y con un suplemento especial, apareció dicho ensayo.

Buffon era un naturalista, con Linneo el más importante del siglo XVIII, y entre los seres vivientes consideraba que debía estudiar al hombre, no solamente en su anatomía y fisiología, sino también en su espíritu, con sus esperanzas, sus miedos, y sus pasiones. Una de las pasiones más generalizadas, según Buffon, era la de los juegos de azar y por esto se propone analizarlos con la idea de ver su influencia en el comportamiento del hombre con sí mismo y con la sociedad. Es así como es conducido a dar un valor "moral" a los números, sobre todo a la cantidad de dinero, pues "quien tiene el doble de fortuna que otro no forzosamente es el doble de feliz". Analiza luego algunos juegos de azar y observa que "el análisis ha sido el único instrumento que hasta la fecha se ha utilizado en la ciencia de las probabilidades, como si la geometría no fuera indicada para esos fines, cuando en realidad basta un poco de atención para observar que la ventaja del análisis sobre la geometría es tan solo accidental y que el azar es tan propio del análisis como de la geometría". Después añade "para poner a la geometría en posesión de sus

derechos sobre la ciencia del azar, bastará inventar juegos que se basen en la extensión y sus relaciones". Como ejemplo, expone el caso de una aguja que se lanza al azar sobre un plano en el que se han dibujado rectas paralelas equidistantes, cuya distancia entre ellas sea superior a la longitud de la aguja, con el convenio de que el jugador gana si la aguja no corta a ninguna paralela y pierden el caso contrario. Para calcular el premio que recibirá el jugador en el caso de ganar, hace falta calcular la probabilidad de que la aguja no corte a ninguna paralela. Suponiendo que la apuesta sea igual a la unidad, para que el juego sea equitativo, el premio deberá ser igual a la inversa de dicha probabilidad. Esto es lo que calcula Buffon, con lo que se considera que dió origen a la teoría de las probabilidades geométricas. Como vemos, se trata de un problema para cuya solución no es posible "contar" los casos favorables y los posibles, como ocurre en los juegos de azar discretos, como los basados en dados o monedas, sino que se deben "medir" dichos casos. La diferencia entre contar y medir es precisamente lo que distingue la aritmética de la geometría.



rectas paralelas y calcula la probabilidad de que una aguja arrojada al azar sobre el plano no corte a ninguna de esas rectas (problema de la aguja de Laplace). Si en vez de una aguja se lanza sobre el plano una curva cualquiera de longitud finita, se puede calcular el valor medio del número de puntos de intersección de la curva con el reticulado de rectángulos.

Cuando se tiene una teoría basada en la simbiosis de otras dos, el crecimiento puede ser conjunto o por separado según cada componente. En el caso que estamos considerando, el crecimiento por el lado de la geometría dió lugar a la llamada geometría integral, y el crecimiento por el lado de las probabilidades, a la geometría estocástica, dos ramas con las mismas raíces y muchas analogías, pero también con diferentes propósitos y formas de presentación.

Los problemas de la aguja de Buffon o de Laplace, motivan el problema de medir conjuntos de rectas del plano. Desde siempre se habían medido conjuntos de puntos (longitud de curvas o áreas de dominio) pero no se había

Resulta así que las probabilidades geométricas, lo mismo que las probabilidades en general, se originaron en un juego de azar, con lo que se confirma una frase de Leibniz en una carta a Montmort en 1715, en la que dice "los hombres nunca son tan ingeniosos como la invención de juegos: el espíritu se encuentra en ellos a sus anchas". Notemos, además, que la consideración conjunta de ideas geométricas y probabilistas dió origen a resultados interesantes. Por ejemplo, utilizando el mismo resultado de la aguja de Buffon, realizando la experiencia prácticamente y usando que la frecuencia tiende a la probabilidad, se tiene un método para hallar experimentalmente la longitud de la aguja y también el número "pi" razón de la circunferencia al diámetro. Tal es el origen del llamado método de Montecarlo para obtener resultados por el azar.

Una generalización del problema de la aguja de Buffon no se hizo esperar. Laplace (1749-1827) en su Teoría Analítica de las Probabilidades (1812), considera el plano dividido en rectángulos congruentes por dos haces de

considerado la medida de conjuntos de rectas. La necesidad surgió de las probabilidades geométricas y al principio aparecieron ciertas paradojas, como la clásica de J. Bertrand (*Cálculo de Probabilidades*, 1889) citada en muchos textos clásicos de probabilidades. El inglés M. W. Croftone (1826-1915) fué el primero en darse cuenta de que ello era debido a "ciertas imprecisiones del instrumento utilizado y que los conceptos básicos, como los de cualquier tema nuevo, debían ser revisados paciente y repetidamente, probándolos y corrigiéndolos a la luz de experiencias y comparaciones para purgarlos de cualquier error". Definió entonces una densidad para medir conjuntos de rectas y encontró el hecho curioso de que la medida de las rectas que cortan a un conjunto convexo es igual a la longitud de su contorno. Es decir, así como la medida de los puntos de un dominio convexo es igual a su área, la medida de las rectas que lo cortan (siempre en el plano) es igual a su perímetro, curiosa dualidad que luego ha sido extendida a casos muy generales por Ambartzumian (*Combinatorial Integral Geometry*, 1982).

Crofton obtuvo sus resultados de manera intuitiva, pero llegó a interesantes fórmulas referentes a conjuntos convexos, de puro interés geométrico, que aparecían como ejemplificación de problemas probabilistas. La justificación rigurosa del proceder de Crofton fué dada más tarde por E. Cartan (1869-1951) en 1896 y H. Lebesgue (1875-1941) en 1912.

En la década de los años 30 del presente siglo, W. Blaschke (1885-1962) y su escuela de Hamburgo, retomaron los resultados de Crofton-Cartan Lebesgue para generalizarlos a más dimensiones y sistematizarlos como nuevo capítulo de la geometría, que se tituló geometría integral. Los resultados fueron de puro interés geométrico y la idea primitiva de probabilidad que les había dado origen prácticamente desapareció. En cambio las ideas derivadas de la teoría de grupos, como las del Programa de Erlangen, pasaron a ser explotadas en la nueva geometría, naciendo así la geometría integral afín, proyectiva, no euclidiana, etc. La teoría de grupos de Lie pasó a ser fundamental para la definición de densidades invariantes para estas geometrías. Se vinculó

también la teoría con el clásico *Análisis Armónico* y la medida en grupos.

La rama probabilista de la teoría primitiva de las probabilidades geométricas tardó más en desarrollarse, lo que tuvo lugar en la década de los años 60, principalmente por obra de R.E. Miles que la enriqueció con la incorporación de los procesos estocásticos, dando lugar a la luego llamada *Geometría Estocástica*, cuya obra básica es actualmente la *Stochastic Geometry* de D. Stoyan, W.S. Kendall y J. Mecke (1987). Un capítulo interesante de esta geometría es el de los mosaicos aleatorios, terreno en el que se mezclan la ciencia y el arte, desde los mosaicos de la Alhambra de Granada a los cuadros de Escher, pasando por los grupos cristalográficos.

Al principio hemos mencionado los dos aspectos, puro y aplicado, de la matemática. En los casos de la *Geometría Integral* y de la *Estocástica*, los dos aspectos presentan por separado su interés. Son teorías en general elaboradas por matemáticos puros, con vistas únicamente a problemas del mundo de las ideas, sin otra guía que la belleza de los mismos

y el interés por entender y ordenar sus alcances. Luego han surgido las aplicaciones, que han originado la llamada Estereología, que es una técnica útil en distintas ramas del conocimiento, como la metalurgia, mineralogía, botánica, anatomía,... "se trata de un conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o proyecciones sobre planos". Sus bases teóricas son la geometría integral y estocástica y sus técnicas las relacionadas con la microscopía. Uno de los principales creadores es el español L. M. Cruz Orive, de la universidad de Berna.

La estereología es una primera aproximación, muy simplificada, del problema general de la tomografía computerizada, cuyas raíces pertenecen también a la geometría integral en el sentido más duro de Helgason y Gelfand, el cual fué iniciado por el matemático Radon en 1917, llevado a la práctica por el físico A.M. Cormack (1963) e industrializado por el ingeniero G.N. Hounsfield (1972), recibiendo por ello estos dos últimos el premio Nobel de

Medicina en 1979. Es un claro ejemplo de la unidad de la ciencia pues por el esfuerzo conjunto de un matemático, un físico y un ingeniero, aún separados en el tiempo y en el espacio, cada uno trabajando en su campo, se consiguió un resultado trascendental en la medicina.

Esta dualidad, pura y aplicada, o filosofía y herramienta, de la matemática, que convierte a la misma en un entretrejado de caminos y puentes entre el mundo de las ideas y el de nuestro entorno real, es precisamente lo que le da universalidad y permanencia, por su amplio espectro de gustos y variedad de formas. Quizás sea por ello, que la matemática es al mismo tiempo la ciencia más conservadora y la más creativa y cambiante, que conserva frescas y vivas sus raíces más remotas, en renovada armonía con los brotes más recientes y revolucionarios. Hemos intentado ponerlo de manifiesto en un ejemplo simple y muy limitado, pero seguramente que una evolución análoga puede encontrarse en muchos otros capítulos de esa ciencia.

Luis Antonio Santaló.